РОССИЙСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ОТКРЫТЫЙ
ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ПУТЕЙ СООБЩЕНИЯ

6/8/1

Одобрено кафедрой
«Инженерная экология
и техносферная безопасность»

Утверждено деканом
факультета
«Управление процессами
перевозок»

СИСТЕМНЫЙ АНАЛИЗ И МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССОВ В ТЕХНОСФЕРЕ

Рабочая программа
и задание на курсовую работу
для студентов IV курса
специальности
280101 БЕЗОПАСНОСТЬ ЖИЗНЕДЕЯТЕЛЬНОСТИ
В ТЕХНОСФЕРЕ (БЖТ)

Москва – 2008

Рабочая программа составлена в соответствии с Государственным образовательным стандартом профессионального высшего образования в соответствии с государственными требованиями к минимуму содержания и уровню подготовки инженера по специальности 280101 (БЖТ).

С о с т а в и т е л и : ст. преп. Д.В. Климова,
канд. физ.-мат. наук, доц. В.С. Фокин

Р е ц е н з е н т – канд. техн. наук, проф. Н.И. Зубрев

1. ЦЕЛИ И ЗАДАЧИ ДИСЦИПЛИНЫ

Целью дисциплины является освоение методологии системного мышления и комплексного рассмотрения сложных проблем, принятия решений по управлению объектом, приобретение знаний в области моделирования реальных процессов и явлений.

Любое современное явление как биосферной, так и техносферной природы может быть воспроизведено посредством моделирования. Приобретение знаний и навыков многоаспектного моделирования также является целью данной дисциплины.

Задачи дисциплины:

- изучение типовых приемов для моделирования различных процессов и явлений;
- изучение основных принципов математического моделирования;
- получение теоретических знаний в области построения и использования математических моделей различных типов;
- изучение приемов построения зависимостей, использующихся в прикладных моделях реальных процессов и явлений, приемов прогнозирования;
- получение практических навыков по построению и анализу зависимостей.

2. ТРЕБОВАНИЯ К УРОВНЮ ОСВОЕНИЯ СОДЕРЖАНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ

Дисциплина «Системный анализ и моделирование процессов в техносфере» входит в цикл общепрофессиональных дисциплин Государственного образовательного стандарта профессионального высшего образования Российской Федерации.

Для изучения данного учебного курса необходимо обладать знаниями из следующих областей математики: основы алгебры и теории чисел (матричная алгебра, решение систем линейных уравнений, нахождение корней алгебраических уравнений), физика, информатика, физико-химические процессы в техносфере, основы математического анализа (дифференцирование и интегрирование функций, исследование функций), теории системного анализа и принятия решений. Необходимы знания и навыки работы со стандартными программными средами MS Excel, MS Windows.

Согласно Государственному образовательному стандарту профессионального высшего образования государственные требования к минимуму содержания и уровню подготовки выпускника предполагают, что в результате изучения дисциплины «Надежность технических систем и техногенный риск», студент должен:

иметь представление:

• о научных и организационных основах безопасности производственных процессов и устойчивости производств в чрезвычайных ситуациях;

знать:

• характер взаимоотношений общества, человека и взаимосвязи его производственной деятельности со средой обитания;

• механизм воздействия производства на человека и компоненты биосферы;

• современные компьютерные информационные технологии и системы в области безопасности жизнедеятельности;

уметь:

• анализировать и оценивать степень опасности антропогенного воздействия на среду обитания;

• анализировать, выбирать, разрабатывать и эксплуатировать системы и методы защиты среды обитания;

• моделировать процессы в среде обитания и анализировать модели с использованием ЭВМ;

• использовать современные программные продукты в области предупреждения риска, экозащиты и экологического менеджмента;

иметь опыт:

• практических навыков в прогнозировании техногенного риска путем системного анализа разрабатываемых ими моделей опасных процессов в техносфере и обоснования предложений по его обработке;

• использования вычислительной техники для прогнозирования обстановки в среде обитания и выбора оптимальных средозащитных мероприятий и принятия управленческих решений.

3. ОБЪЕМ ДИСЦИПЛИНЫ И ВИДЫ УЧЕБНОЙ РАБОТЫ

Вид учебной работы	Всего часов
Общая трудоемкость дисциплины	153
Аудиторные занятия:	24
лекции	12
лабораторные занятия	12
Самостоятельная работа	99
Курсовые работы (количество)	1
Вид итогового контроля	Дифференцированный зачет

4. СОДЕРЖАНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ

4.1. Разделы дисциплины и виды занятий

Раздел дисциплины	Лекции, ч	Лабораторные занятия, ч
1. Основы системного анализа	6	4
2. Принципы моделирования систем	2	2
3. Моделирование техногенных процессов	4	6
Всего часов	12	12

4.2. Содержание разделов дисциплины

Раздел 1. ОСНОВЫ СИСТЕМНОГО АНАЛИЗА

1.1. Системы и системный анализ

Основы теории систем и системного анализа. Современное состояние науки о системах. Системы и закономерности их формирования и развития. Определение системы. Понятия, характеризующие строение и функционирование систем. Виды и формы представления структур (сетевая структура, иерархическая структура, матричная структура). Классификация систем. Закономерности систем. Методы и модели теории систем и системного анализа. Информационные подходы к анализу систем.

Системный анализ. Этапы проведения исследования. Моделирование. Классификация моделей по способу моделирования и по сущности взаимосвязей. Имитационные модели.

Закономерности функционирования и развития систем. Понятия, связанные с системами: поведение, устойчивость, достижимость. Управляемые и неуправляемые системы.

1.2. Системный анализ и его основные принципы

Характеристика системного анализа, как метода исследования систем. Основные принципы системного подхода — целостности, эмерджентности, моделирования, комплексного подхода.

Понятие техносферной системы, характеристика и классификация систем, базовые категории систем: элементы, связи, состав, структура, окружение, границы системы; переменные, векторы, траектории и пространства состояний системы.

1.3. Сложные системы

Понятие сложной системы. Характеристика и классификация систем. Базовые категории систем. Принцип декомпозиции систем.

Принципы организации и динамики систем. Свойства эмерджентности, энтропии и гомеостазиса систем. Ситуационное и адаптивное поведение систем.

1.4. Структура системного исследования

Диаграммы причинно-следственных связей. Классификация методов исследования, достоинства и недостатки. Принципы моделирования человеко-машинных и других динамических систем. Этапы жизненного цикла технических и других систем. Понятие оценки состояния, диагностики, прогнозирования в поведении систем.

1.5. Понятие управления

Управления процессом совершенствования систем. Управляющий объект, объект управления, цель, показатели и критерии оценки качества управления. Виды и принципы управления. Диспетчерское управление. Составляющие диспетчерского управления. Индуктивный и дедуктивный механизмы оперативного мышления. Схемы диспетчерского управления. Этапы принятия управляющих решений. Показатели и критерии качества управления. Структура и циклы управления. Принципы обоснования, обеспечения, контроля и поддержания оптимальных по выбранному критерию показателей качества систем.

Раздел 2. ПРИНЦИПЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ СИСТЕМ

2.1. Виды моделирования

Понятие и виды моделей. Этапы процесса моделирования. Концептуальное и многоаспектное моделирование. n — кратное моделирование. Исходные данные и ограничения. Адекватность модели. Характеристики моделей.

2.2. Математическое моделирование

Преимущества и недостатки. Исходные данные и ограничения. Обработка и интерпретация результатов моделирования. Регрессионный анализ. Детерминированные и стохастические модели. Линейные и нелинейные модели. Линейное программирование. Другие виды моделей. Оптимизация эксперимента на математической модели.

2.3. Метод планирования эксперимента

Факторы. Уравнения регрессии. Кодирование факторов. Организация эксперимента. Матрицы планирования для полного факторного эксперимента. Уравнения для определения коэффициентов. Примеры использования метода.

2.4. Имитационное моделирование

Особенности и преимущества. Необходимость компьютерной поддержки. Этапы моделирования. Оптимизационные модели. Практическая компьютерная реализация систем моделирования. Основные модели гидромеханики. Численные методы в гидромеханике. Явные и неявные схемы решения; эйлеровы и лангранжевы переменные.

2.5. Экспертные системы

Понятие экспертных систем (ЭС). Области применения ЭС при моделировании процессов в техносфере. Классификация задач, решаемых с помощью ЭС. Преимущества.

Представление информации в ЭС. Понятие знания. Модели представления знаний. Понятие кванторов. Дерево «и/или». Понятие предиката. Модели предикатного типа. Модели продукционного типа. Модели на основе табличного языка. Сематические модели. Модели на основе фреймов.

Экспертные оценки. Виды экспертных оценок. Методы обработки.

2.6. Неопределенность информации

Понятие квалификаторов. Методы учета неопределенности информации в ЭС. Коэффициент доверия Шортлиффа. Экспертная система MYCIN. Использование коэффициента доверия в продукционных системах. Примеры построения баз знаний на основе подхода Шортлиффа. Понятие пороговых оценок неопределенной информации. Теорема Байеса. Схема организации знаний. Учет неточности фактов. Нечеткая логика Заде. Понятие нечеткого множества. Концепция сигма счисления. Операции над нечеткими множествами. Понятие лингвистической переменной. Способы построения функции принадлежности. Нечеткие высказывания.

2.7. Понятие машины вывода

Свойство селективности. Способы вывода. Управление процессом вывода. Цена свидетельств. Трасса вывода. Метаправила.

2.8. Статистическое моделирование

Методы оценивания зависимостей: статистический и нестатистический подходы. Статистический анализ зависимостей. Элементарные статистические операции. Исследование тесноты взаимосвязей. Метод наименьших квадратов нахождения параметров зависимости. Индексный метод. Использование индексов для моделирования систем. Анализ динамических рядов и прогнозирование. Исследование периодизации реальных процессов.

Раздел 3. МОДЕЛИРОВАНИЕ ТЕХНОГЕННЫХ ПРОЦЕССОВ

3.1. Техносферные системы

Понятие техносферных систем. Моделирование техносферных систем: технических, человеко-машинных и др. Примеры моделей.

3.2. Социально-экономические системы

Понятие социально-экономических систем. Анализ и режим многокомпонентных задач. Системный анализ и прогнозирование социально-эколого-экономических систем. Анализ и решение многокомпонентных задач. Моделирование техносферы с помощью взвешенных орграфов. Прогноз развития социоэкологоэкономической системы на базе матриц инцидентности, орграфов.

Моделирование демографических процессов (модель демографического развития Рюмкина-Тябаева).

3.3. Моделирование экологических рисков

Понятие и моделирование экологических рисков. Классификация математических моделей экологического риска. Оценка полного и дополнительного риска беспороговых токсикантов, оценка риска по снижению продолжительности жизни. Модели оценки рисков пороговых токсикантов (модели Вейбула-Гнеденко, линейно-квадратичная). Оценка ПДК выбросов вредных веществ. Цена риска и методы ее оценки. Имитационное моделирование деятельности предприятия по выбросу вредных веществ во внешнюю среду с оценкой социально-экономических и экологических последствий.

3.4. Элементы системного анализа в экологии и охране окружающей природной среды

Понятия и методология экосистемного анализа. Структура экосистемы. Анализ компонентов экосистемы, их характеристика и взаимодействие. Энергетические и информационные потоки в экосистемах. Факторы, действующие в экосистемах. Помехи в экосистемах.

Развитие системных идей в экологии. Основные принципы системного анализа процессов в биосфере. Экомоделирование систем биосферы и ее составных частей.Постановка типичных экосистемных задач.в биосфере. Аналитические и численные методы решения экосистемных задач.

Диссипативные структуры в моделях экосистем. Понятие открытой структуры. Термодинамика экосистем и эволюционных процессов в биосфере. Теорема Пригожина (принцип минимума прироста энтропии). Принцип Ле-Шателье – Брауна.Иерархия неустойчивости в самоорганизующихся экосистемах.

3.5. Экология иерархических систем живого

Жизнь как термодинамический процесс. Информация и феномен жизни. Динамика информации (принцип автогенеза, критерий значимости, биологическая иерархия и возникновение биосферы). Разнообразие и стабильность природных сообществ. Закон разнообразия Дж. Эшби. Биота как регулятор и проблема устойчивости. Идея биоцентризма в экологии. Циклические процессы в биосфере.

3.6. Математическое моделирование в экологии и охране окружающей природной среды

Основы моделирования (сбор информации, построение модели, идентификация параметров модели, регрессивный анализ). Статистические и динамические модели экосистем. Построение прогностических моделеей экосистем. Компьютерная реализация моделей экосистем с использованием пакетов прикладных программ.

3.7. Модели экосистем

Элементарные модели. Математические модели динамики популяций и сообществ. Эколого-экономические (региональные) модели. Модели массопереноса в экосистемах. Модели глобального развития.

4.3. Практические занятия

Практикум не предусмотрен.

4.4. Лабораторный практикум

Раздел дисциплины	Лабораторное занятие
1. Основы системного анализа	1. Системный анализ и его роль в практической деятельности 2. Роль моделей и моделирования в изучении систем 3. Системы и модели систем 4. Статистический анализ зависимостей
2. Принципы моделирования систем	5. Многократные вычисления по формулам 6. Графическое моделирование 7. Моделирование случайных процессов 8. Моделирование очередей в системах массового обслуживания
3. Моделирование техногенных процессов	9. Природно-технические системы как особый тип современных систем 10. Моделирование полета тела, брошенного под углом к горизонту 11. Моделирование движения небесных тел и заряженных частиц 12. Моделирование колебательных процессов 13. Методы построения зависимостей. Статистический анализ зависимости смертности от выбросов вредных веществ 14. Разработка дискретных моделей динамики популяций

5. УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ

5.1. Рекомендуемая литература

Основная

1. Анфилатов В.С., Емельянов А.А., Кукушкин А.А. Системный анализ в управлении: Уч. пос. — М.: Финансы и статистика, 2006.

2. Гайдес М.А. Общая теория систем (системы и системный анализ). — М.: Глобус-пресс, 2005.

3. Тырсин А.С. Теория систем и системный анализ: Уч. пос. — Челябинск: УрСЭИ АТиСО, 2002.

4. Сурмин Ю.П. Теория систем и системный анализ: Уч. пос. — Киев: МАУП, 2003.

Дополнительная

5. Спицнадель В.Н. Основы системного анализа: Уч. пос. — СПб.: «Изд. дом «Бизнесс-пресса», 2000.

5.2. Средства обеспечения освоения дисциплины

5.2.1. Наглядные пособия

Презентационные демонстрации в Microsoft Office Power Point.

5.2.2. Электронные средства

Персональные компьютеры не ниже Pentium III со следующим установленным программным обеспечением:

Microsoft Office Power Point;

MathCad 11.

6. КУРСОВАЯ РАБОТА

6.1. Цель, задачи и этапы курсового проектирования

Курсовая работа выполняется для закрепления знаний по курсу «Системный анализ и моделирование процессов в техносфере» и получения навыков разработки программного обеспечения реализующего решение задачи линейного программирования.

Исходные данные в задании берутся из таблиц с учетом шифра студентов (по последней и предпоследней цифрам шифра).

Перед началом выполнения курсовой работы студентам рекомендуется ознакомиться с рекомендованной литературой, прослушать установочные лекции, выполнить лабораторные работы.

Задания 1–3 выполняются в среде математического пакета MathCad 11.

6.2. Правила оформления курсовой работы

1. Работа выполняется на листах бумаги формата А4.

2. На первой странице каждого задания записывается полные условия и исходные данные.

3. Далее оформляется пояснительная записка, содержащая все расчетные формулы.

4. Каждое последующее задание должно начинаться с новой страницы.

5. Оформление заданий должно сопровождаться краткими, но исчерпывающими пояснениями, согласно приведенным примерам расчета.

6. Графики и рисунки должны быть выполнены аккуратно, используя чертежные инструменты, на миллиметровой бумаге и вклеены в курсовую работу.

7. В конце курсовой работы необходимо указать учебные пособия, учебники, использованные при ее выполнении и дату сдачи работы.

8. Если курсовая работа не допущена к зачету, то все необходимые дополнения и исправления сдают вместе с незачтенной работой.

9. Исправления в тексте незачтенной работы не допускаются.

10. Допущенная к зачету курсовая работа с внесенными уточнениями предъявляется преподавателю на зачете. Студент должен быть готов дать во время зачета пояснения по выполнению всех заданий.

Задание 1

Пользуясь критериями устойчивости Михайлова и Найквиста определить устойчивость одноконтурной системы управления, имеющую в разомкнутом состоянии передаточную функцию вида

$$W(s)=\frac{K}{(as+1)(bs+1)^2(cs+1)}.$$

Построить годографы Михайлова и Найквиста. Определить частоту среза системы. Определить критическое значение коэффициента усиления системы. Исходные данные берутся из табл. 1.1.

Таблица 1.1

Значения параметров системы

№ п/п	*K*, 1/сек	*a*, сек	*b*, сек	*c*, сек
0	50	25	0,1	0,01
1	40	20	0,2	0,02
2	30	30	0,15	0,005
3	40	50	0,1	0,005
4	100	100	0,2	0,01
5	120	80	0,1	0,01
6	40	10	0,2	0,01
7	50	30	0,4	0,01
8	100	20	0,15	0,02
9	40	150	0,2	0,01

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ К ЗАДАНИЮ 1

1. Запишите передаточную функцию разомкнутой системы:

$$\frac{K}{(as+1)(bs+1)^2(cs+1)}.$$

2. Определите устойчивость системы:

а) критерий Михайлова.

Передаточная функция замкнутой системы:

$$W_з(s) = \frac{K}{(as+1)(bs+1)^2(cs+1)+K}.$$

Характеристический многочлен замкнутой системы:

$$D(s) = (as+1)(bs+1)^2(cs+1)+K = d_1s^4 + d_2s^3 + d_3s^2 + d_4s + d_5.$$

Определите, будет ли система устойчива в замкнутом состоянии.

$$D(j\omega) = d_1\omega^4 - d_2 j\omega^3 - d_3\omega^2 + d_4 j\omega + d_5 = (d_1\omega^4 - d_3\omega^2 + d_5) + j(d_4\omega - d_2\omega^3)$$

$D(j\omega) = U + jV$, где

$$U = d_1\omega^4 - d_3\omega^2 + d_5,$$

$$V = d_4\omega - d_2\omega^3.$$

Постройте годограф Михайлова вблизи и вдали от нуля, для этого постройте $D(j\omega)$ при изменении ω от 0 до $+\infty$. Найдите точки пересечения $U(\omega)$ и $V(\omega)$ с осями. Сделайте выводы об устойчивости системы по годографу.

б) критерий Найквиста.

Передаточная функция разомкнутой системы:

$$W_p(s) = \frac{K}{(as+1)(bs+1)^2(cs+1)} = \frac{K}{d_1s^4 + d_2s^3 + d_3s^2 + d_4s + d_5};$$

$$W_P(j\omega) = \frac{K}{(d_1\omega^4 - d_3\omega^2 + d_5) + j(d_4\omega - d_2\omega^3)} =$$

$$= \frac{K(d_1\omega^4 - d_3\omega^2 + d_5 - j(d_4\omega - d_2\omega^3))}{(d_1\omega^4 - d_3\omega^2 + d_5)^2 + (d_4\omega - d_2\omega^3))^2} =$$

$$= \frac{Kd_1\omega^4 - Kd_3\omega^2 + Kd_5 + j(-Kd_4\omega + Kd_2\omega^3)}{f_1\omega^8 + f_2\omega^6 + f_3\omega^4 + f_4\omega + f_5};$$

$W_P(j\omega) = X + jY$, где

$$X = \frac{Kd_1\omega^4 - Kd_3\omega^2 + Kd_5}{f_1\omega^8 + f_2\omega^6 + f_3\omega^4 + f_4\omega + f_5};$$

$$Y = \frac{-Kd_4\omega + Kd_2\omega^3}{f_1\omega^8 + f_2\omega^6 + f_3\omega^4 + f_4\omega + f_5}.$$

Определите точки пересечения $X(\omega)$, $Y(\omega)$ с осями.

Определите, устойчива ли система в разомкнутом состоянии. Для этого постройте годограф Найквиста (рисуем $W_P(j\omega)$ при изменении ω от 0 до $+\infty$) вблизи и вдали от нуля. Определите устойчивость системы.

3. Найдите частоту среза системы и критическое значение коэффициента усиления системы.

Решите систему:

$$\begin{cases} X(\omega_c) = -1 \\ Y(\omega_c) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{k_c(d_1\omega^4 - d_3\omega^2 + d_5)}{f_1\omega^8 + f_2\omega^6 + f_3\omega^4 + f_4\omega + f} = -1 \\ \dfrac{k_c(-d_4\omega_c + d_2\omega_c{}^3)}{f_1\omega_c{}^8 + f_2\omega^6 + f_3\omega^4 + f_4\omega_c + f_5} = 0. \end{cases}$$

Из второго уравнения находится частота среза системы ω_c.

Подставьте полученное значение ω_c в первое уравнение и найдите критическое значение коэффициента усиления системы k_c.

Задание 2

Завод выпускает несколько видов продукции: $П_1$,. $П_2$, ... $П_N$. Для выпуска продукции требуется четыре вида ресурсов: электроэнергия и три вида сырья. Запасы ресурсов ограничены. Расход ресурсов на единицу продукции и другие величины указаны в табл. 2.1. Необходимо спланировать производство (т.е. выбрать x_1, x_2, x_3) так, чтобы доход был максимальный. Для каждого варианта, в соответствии с приведенной ниже табл. 2.2, в качестве исходных данных выбирается количество ресурсов и количество видов продукции, т.е. количество ограничений задачи ЛП и количество переменных.

Таблица 2.1

Расход ресурсов на единицу продукции

Виды ресурсов	Расход ресурсов на единицу продукции $П_i$	Запасы ресурсов
Электроэнергия	a_{1i}	b_1
Ресурс j	$a_{(j+1)i}$	b_{j+1}
Стоимость единицы продукта	c_i	–
Количество единиц продукта	x_i	–

Таблица 2.2

Количество ресурсов и количество видов продукции

№ варианта	Количество ресурсов	Количество видов продукции
0	2	5
1	2	6
2	2	7
3	2	8
4	3	6
5	3	7
6	3	8
7	3	9
8	4	7
9	4	8

Для каждого варианта необходимо решить задачу линейного программирования симплекс-методом, таким образом, чтобы максимизировать значение целевой функции.

Задание выполняется в несколько этапов:

1. Анализ задания на выполнение работы.

2. Разработка алгоритма решения задачи линейного программирования.

3. Программная реализация алгоритма на языке высокого уровня.

4. Отладка и тестирования ПО.

5. Подготовка отчета и защита работы.

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПО ВЫПОЛНЕНИЮ ЗАДАНИЯ 2

Постановка задачи линейного программирования

В ходе практической деятельности достаточно часто приходится сталкиваться с задачами оптимального распределения ограниченных ресурсов (распределение сырья, оптимальный раскрой заготовок, планирование загрузки оборудования, организация перевозок и т.п.).

Доход выражается функцией f.

$$f(x_1, x_2, x_3) = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n.$$

В общем случае большинство задач, решаемых методами математического программирования, может быть сформулировано следующим образом:

найти максимум целевой функции $f(x_1,\ldots,x_n)$

при ограничениях:

$$g_1(x_1,\ldots,x_n) \le b_1;$$

$$g_m(x_1,\ldots,x_n) \le b_m.$$

Наиболее просто подобные задачи решаются в том случае, если целевая функция и ограничения являются *линейными*. В этом случае говорят о *линейном программировании* и, соответственно, задаче линейного программирования (ЛП). Ее можно сформулировать следующим образом:

найти максимум функции

$$\sum_{i=1}^{n} c_i x_i, \tag{2.1}$$

при условиях

$$\begin{aligned}
&a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \le b_1;\\
&a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \le b_2;\\
&\ldots\\
&a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \le b_m;\\
&x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0, \ldots,\ x_n \ge 0.
\end{aligned} \tag{2.2}$$

В некоторых случаях ограничивающие условия могут содержать как неравенства, так и равенства (смешанные ограничения). Если же все ограничения задачи ЛП заданы в виде строгих равенств, то такая форма называется *канонической*.

Выражения (2.1)–(2.2) можно переписать в матричной форме. В этом случае они примут вид:

найти максимум функции, при условии

$$\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{Ax} \le \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{x} \ge 0,$$

где $\boldsymbol{A}$ — матрица ограничений размером $(m \times n)$;

$\boldsymbol{b}$ — вектор-столбец свободных членов, размером $(m \times n)$;

$\boldsymbol{x}$ — вектор переменных, размером $(m \times 1)(n \times 1)$;

$\boldsymbol{c}^T = [c_1, c_2, \ldots, c_n]$ — вектор-строка коэффициентов целевой функции.

Если некоторый вектор x удовлетворяет условиям (2.2), он называется *допустимым решением задачи* ЛП. Все возможные решения образуют *множество допустимых решений* $R(\boldsymbol{x})$.

Решение называется *оптимальным*, если для него выполняется условие, для всех $(\boldsymbol{x}_{\text{o}}\boldsymbol{c}^T)\boldsymbol{x}_{\text{o}} \ge \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}$, для $\boldsymbol{x} \in R(\boldsymbol{x})$.

Вообще справедлива следующая теорема.

Если целевая функция принимает максимальное значение в некоторой точке множества допустимых решений то она принимает это значение в крайней точке. Если целевая функция принимает максимальное значение более чем в одной крайней точке, то она принимает это же значение в любой их выпуклой комбинации.

Для решения задач ЛП необходимо осуществить переход от неравенств к равенствам в системе ограничений. Для этого в неравенства вводят дополнительные свободные переменные: $x_{n+1} \geq 0, x_{n+2} \geq 0, \ldots, x_{n+m} \geq 0$. В результате получается так называемая расширенная задача ЛП.

Найти максимум целевой функции:

$$f(x_1,\ldots,x_n) = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n + 0\cdot x_{n+1} + \ldots + 0\cdot x_{n+m} \quad (2.3)$$

при ограничениях:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n + 1\cdot x_{n+1} + 0\cdot x_{n+1} + \ldots + 0\cdot x_{n+m} = b_1;$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n + 0\cdot x_{n+1} + 1\cdot x_{n+1} + \ldots + 0\cdot x_{n+m} = b_2;$$

...

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n + 0\cdot x_{n+1} + 0\cdot x_{n+1} + \ldots + 1\cdot x_{n+m} = b_m$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \ldots, x_n \geq 0, \; x_{n+1} \geq 0, \ldots, x_{n+m} \geq 0. \quad (2.4)$$

В матричной форме расширенная задача ЛП имеет вид:
найти максимум при ограничениях

$$\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}_1\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{E}\boldsymbol{x}_2 = \boldsymbol{b},$$

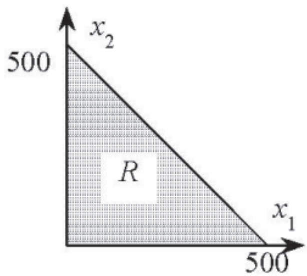
где $\boldsymbol{A}$ — описанная ранее матрица ограничений размером $m\times n$;
$\boldsymbol{x}$ — вектор переменных размером $(m\times n)$;
$\boldsymbol{E}$ — единичная матрица размером $(n\times 1)\times m$;
$\boldsymbol{x}_2$ — вектор свободных переменных размером $(m\times 1)$:

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix}; \; x_2 = \begin{pmatrix} x_{n+1} \\ x_{n+2} \\ \ddots \\ x_{n+m} \end{pmatrix}.$$

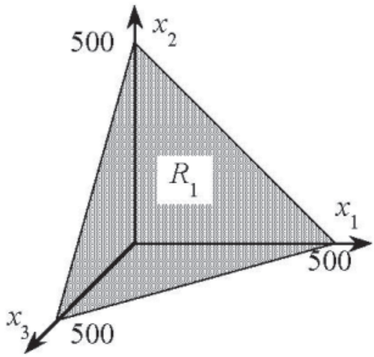
В векторной форме расширенная задача ЛП имеет вид:
найти максимум при ограничениях:

$$A_1x_1 + A_2x_2 + \ldots + A_nx_n + A_{n+1}x_{n+1} + \ldots + A_{n+m}x_{n+m} = b.$$

Рассмотрим следующий пример: пусть в исходной задаче ограничения заданы в виде неравенства $x_1 + x_2 \le 500$. С учетом требований неотрицательности переменных область допустимых решений R будет иметь вид треугольника (рис. 2.1, *а*).



а



б

Рис. 2.1

При переходе к расширенной задаче ЛП в это неравенство вводится дополнительная свободная переменная, в результате чего ограничение принимает вид равенства: (рис. 2.1, *б*). Область допустимых решений расширенной задачи ∞. Между областями существует однозначное соответствие. Из рисунка видно, что область R представляет собой проекцию на плоскость.

$$x_3x_1 + x_2 + x_3 = 500R_1R_1R_1R_1x_1Ox_2.$$

Предположим, что ограничения заданы в форме равенств:

$$\boldsymbol{A}^{(m\times n)}\boldsymbol{x}^{(n\times 1)} = \boldsymbol{b}^{(m\times 1)}. \quad (2.5)$$

Предположим также, что число ограничений m меньше числа переменных n и ранг матрицы $\boldsymbol{A}$ равен m. Напомним, что *рангом* *матрицы* называется такое число $\boldsymbol{r}$, что по крайней мере один определитель r-го порядка, получаемый из этой матрицы при удалении некоторых строк и/или столбцов, отличен от нуля, а все определители $(r+1)$-го порядка равны нулю. Ранг матрицы равен наибольшему числу линейно независимых строк (или столбцов).

Выберем из матрицы $\boldsymbol{A} = [\boldsymbol{A}_1, \boldsymbol{A}_2, \ldots, \boldsymbol{A}_n]$ m линейно независимых столбцов, которые обозначим через $\boldsymbol{B}^{(m \times m)}$. Матрица $\boldsymbol{B}$ образует базис системы. Совокупность оставшихся столбцов матрицы $\boldsymbol{A}$ обозначим через $\boldsymbol{D}$. Тогда $\boldsymbol{A} = [\boldsymbol{B}, \boldsymbol{D}]$. Если обозначить совокупность переменных, связанных с базисной матрицей через (базисные переменные), а связанных с матрицей $\boldsymbol{D}$ — через (небазисные переменные), то ограничения можно переписать в виде $\boldsymbol{x}_b \boldsymbol{x}_d$:

$$\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{Bx}_b + \boldsymbol{Dx}_d = \boldsymbol{b}.$$

Поскольку $\boldsymbol{B}$ — невырожденная квадратная матрица, то существует обратная к ней матрица, поэтому можно домножить на нее слева обе части последнего выражения, в результате чего получится $\boldsymbol{B}^{-1}$:

$$\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{Bx}_b + \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{Dx}_d = \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b}.$$

Отсюда

$$\boldsymbol{x}_b = \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b} - \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{Dx}_d. \tag{2.6}$$

Если приравнять все небазисные переменные к нулю, то получим так называемое *базисное решение системы* (2.5). Если оно удовлетворяет условию неотрицательности, то такое решение называется допустимым базисным решением. Рассмотрим без доказательства еще одну теорему.

Если существует такое независимое множество m-мерных векторов $A_1, A_2, \ldots, A_m$, что $\boldsymbol{A}_1 x_1 + \boldsymbol{A}_m x_m = \boldsymbol{b}$, т.е. существует крайняя точка допустимого множества. Другими словами, каждое допустимое базисное решение соответствует крайней точке.

$$x^T = \left(x_1, x_2, \ldots, x_m, \underbrace{0, 0, \ldots, 0}_{n-m} \right)$$ есть крайняя точка $R_1 R_1$.

Симплекс-метод

В качестве исходных данных для симплекс-метода записываются ограничения задачи ЛП в канонической форме:

$$\boldsymbol{A}_1 x_1 + \boldsymbol{A}_2 x_2 + \ldots + \boldsymbol{A}_{n+m} x_{x+m} = \boldsymbol{b}. \qquad (2.7)$$

Если из (2.7) выбрать m линейно независимых векторов , которые образуют базис, а все небазисные переменные приравнять нулю, получим уравнение: $\boldsymbol{A}_1, \boldsymbol{A}_2, \ldots, \boldsymbol{A}_m\, x_{m+1}, \ldots, x_{m+n}$ при

$$\boldsymbol{A}_1 x_1^* + \boldsymbol{A}_2 x_2^* + \ldots + \boldsymbol{A}_m x_m^* = \boldsymbol{b}, \qquad (2.8)$$

в котором $\left\{x_1^*, x_2^*, \ldots, x_m^*\right\}$ образуют базисное решение. Предположим, что оно является допустимым, т.е. все $x_i^* \geq 0$.

Попробуем теперь найти еще одно допустимое базисное решение. Для этого предположим, что одна из небазисных переменных будет отличаться от нуля. В этом случае уравнение (2.7) можно представить в виде:

$$\boldsymbol{A}_1 x_1 + \boldsymbol{A}_1 x_1 + \ldots + \boldsymbol{A}_m x_m + \boldsymbol{A}_r x_r = \boldsymbol{b}. \qquad (2.9)$$

Обозначим решение этого уравнения как $\left\{\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \ldots, \tilde{x}_m, x_r\right\}$, т.е. справедливо равенство:

$$\boldsymbol{A}_1 \tilde{x}_1 + \boldsymbol{A}_2 \tilde{x}_2 + \ldots + \boldsymbol{A}_m \tilde{x}_m + \boldsymbol{A}_r x_r = \boldsymbol{b}. \qquad (2.10)$$

Базис образует m-мерное линейное пространство, поэтому каждый из небазисных векторов $\boldsymbol{A}_1, \boldsymbol{A}_2, \ldots, \boldsymbol{A}_m \boldsymbol{A}_{m+1}, \ldots, \boldsymbol{A}_{m+n}$ может быть единственным образом выражен через этот базис. Поскольку вектор не входит в базис, то его можно представить в виде суммы:

$$\boldsymbol{A}_r = \boldsymbol{A}_1 x_{1r} + \boldsymbol{A}_2 x_{2r} + \ldots + \boldsymbol{A}_m x_{mr}. \qquad (2.11)$$

где $\boldsymbol{A}_r$ — соответствующие коэффициенты, x_{ir}.

Умножим выражение (2.11) на x_r:

$$\boldsymbol{A}_r x_r = \boldsymbol{A}_1 x_{1r} x_r + \boldsymbol{A}_2 x_{2r} x_r + \ldots + \boldsymbol{A}_m x_{mr} x_r. \qquad (2.12)$$

Теперь вычтем выражение (2.12) из (2.8). В результате получим:

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{A}_1(x_1^* - x_{1r}x_r) + \boldsymbol{A}_2(x_2^* - x_{2r}x_r) + \ldots + \boldsymbol{A}_m(x_m^* - x_{mr}x_r) = \boldsymbol{b} - \boldsymbol{A}_r x_r,\\ &\boldsymbol{A}_1(x_1^* - x_{1r}x_r) + \boldsymbol{A}_2(x_2^* - x_{2r}x_r) + \ldots + \boldsymbol{A}_m(x_m^* - x_{mr}x_r) + \boldsymbol{A}_r x_r = \boldsymbol{b}.\end{aligned} \tag{2.13}$$

Если теперь сравнить уравнение (2.10), описывающее новое решение, с только что полученным выражением (2.13), в котором используется предыдущее решение, то можно установить связь нового решения $\{\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \ldots, \tilde{x}_m, x_r\}$ со старым базисным $\{x_1^*, x_2^*, \ldots, x_m^*\}$:

$$\tilde{x}_1 = x_1^* - x_{1r}x_r; \ldots; \tilde{x}_m = x_m^* - x_{mr}x_r;\ x_r = x_r. \tag{2.14}$$

Однако найденное решение, во-первых, не будет базисным, поскольку в нем не m, а $(m + 1)$ переменная, а во-вторых, не обязательно будет допустимым, так как некоторые могут оказаться отрицательными $\tilde{x}_i$.

Чтобы решение было допустимым, очевидно, необходимо выбирать значение таким образом, чтобы ни одна из величин не оказалась меньше нуля, т.е. или $x_i \tilde{x}_i 0$ или $x_r \le x_i^*$ или $x_i^* - x_{ir}x_r \ge 0$ для всех $i = 1, 2,\ldots,n$. Отсюда следует, что максимальное значение будет равно:

$$x_{r\max} = \min_i \{x_i^* / x_{ir}\}, \tag{2.15}$$

где $x_{ir} > x_r$.

Для того, чтобы новое решение было базисным, необходимо удалить одну переменную x_j из решения, а соответствующий вектор $\boldsymbol{A}_j$ из базиса. В этом случае новый базис также будет содержать m векторов. Очевидно, что из решения следует удалять ту переменную, для которой достигается минимальное значение x_i^* / x_{ir}, т.е.:

$$x_j^* / x_{jr} = \min_i \{x_i^* / x_{ir}\}. \tag{2.16}$$

В результате новое решение имеет вид:

$$\begin{gathered}x_1^* - x_{r\max} x_{1r};\ x_2^* - x_{r\max} x_{2r};\ldots x_{j-1}^* - x_{r\max} x_{j-1r};\\ x_{j+1}^* - x_{r\max} x_{j+1r};\ldots;x_m^* - x_{r\max} x_{mr};x_{r\max},\end{gathered} \tag{2.17}$$

а новый базис — $\{\boldsymbol{A}_1, \boldsymbol{A}_2,\ldots,\boldsymbol{A}_{j-1}, \boldsymbol{A}_{j+1},\ldots,\boldsymbol{A}_m, \boldsymbol{A}_r\}$.

Таким образом, с помощью рассмотренной методики оказывается возможным переходить от одного допустимого базисного решения к другому. Однако в реальных задачах m и n, как правило, столь велики, что бессистемный перебор оказывается крайне неэффективным. Следует выбирать вектор, который вводится в базис таким образом, чтобы значение целевой функции для нового базисного решения было больше, чем для предыдущего $\boldsymbol{A}$.

Рассмотрим, чему будет равна целевая функция на новом базисном решении $\{x_1^* - x_{1r}x_r,\ldots,x_m^* - x_{mr}x_r, x_r\}$:

$$\begin{aligned}z_1 &= c_1(x_1^* - x_{1r}x_r) + c_2(x_2^* - x_{2r}x_r) + \ldots + c_m(x_m^* - x_{mr}x_r) + c_r x_r = \\ &= \underbrace{(c_1x_1^* + c_2x_2^* + \ldots + c_m x_m^*)}_{z_0} + \underbrace{x_r(c_r - c_1x_{1r} - \ldots - c_m c_{mr})}_{\textit{симплекс}-\textit{разность}},\end{aligned} \tag{2.18}$$

где z_0 — значение целевой функции, соответствующее исходному базисному решению.

Для того, чтобы новое значение целевой функции z_1 было больше, чем предыдущее z_0, следует вводить в базисное решение такую свободную переменную x_r, которая обеспечит максимальную положительную симплекс-разность.

Подводя итог, можно сформулировать окончательный алгоритм симплекс-метода:

1) найти начальный базис и связанное с ним допустимое решение;

2) вычислить симплекс-разность для каждой переменной, не входящей в базисное решение;

3) ввести в базис самую выгодную переменную с максимальной симплекс-разностью, причем ее значение принять равным $x_{r\max}$ для всех i, для которых $x_{ir} > \min\limits_i\{x_i^* / x_{ir}\}$;

4) вывести из базисного решения переменную x_j, а из базиса вектор $\boldsymbol{A}_j$, где $j = \arg\min\limits_i\{x_i^* / x_{ir}\}$;

5) повторять шаги 1–4 до тех пор, пока симплекс-разности для всех переменных, не входящих в базис, не станут отрицательными — это признак оптимальности найденного базисного решения.

Задание 3. Компьютерное моделирование в экологии

Рассматриваются модели классической экологии (взаимодействие популяций). Популяция — совокупность особей одного вида, существующих в одно и то же время и занимающих определенную территорию.

Взаимодействие особей внутри популяции определяется внутривидовой конкуренцией, взаимодействие между популяциями — межвидовой конкуренцией.

Внутривидовая конкуренция в популяции с дискретным размножением. Для популяций с дискретным размножением (некоторые виды растений, насекомых и т.д.) поколения четко разнесены во времени и особи разных поколений не сосуществуют. Численность такой популяции можно характеризовать числом N_t и считать t величиной дискретной — номером популяции.

Одна из моделей межвидовой конкуренции в этом случае выражается уравнением

$$N_{t+1} = \frac{N_t \cdot R}{1 + (a \cdot N_t)^b}. \qquad (3.1)$$

Здесь R — скорость воспроизводства популяции в отсутствии внутривидовой конкуренции (математически это соответствует случаю $a = 0$). Тогда уравнение определяет просто изменение численности популяции по закону геометрической прогрессии: $N_t = N_0 \cdot R^t$, где N_0 — начальная численность популяции.

Знаменатель в уравнении отражает наличие конкуренции, делающей скорость роста тем меньше, чем больше численность популяции; a и b — параметры модели.

Исходные параметры модели:

- R — скорость воспроизводства;
- N_0 — начальная численность популяции;
- a — параметр, характеризующий интенсивность внутривидовой конкуренции.

Характерная черта эволюции при $b = 1$ — выход численности популяции на стационарное значение при любых значениях других параметров. Однако, в природе так бывает не всегда и более общая модель при $b \neq 1$ отражает другие, более сложные, но реально существующие, виды эволюции. Этих видов модель описывает четыре:

1) монотонное установление стационарной численности популяции;

2) колебательное установление стационарной численности популяции;

3) устойчивые предельные циклы изменения численности популяции;

4) случайные изменения численности популяции без наличия явных закономерностей (динамический хаос).

Внутривидовая конкуренция в популяции с непрерывным размножением. Математическая модель в данном случае строится на основе дифференциальных уравнений. Наиболее известна так называемая логистическая модель:

$$\frac{dN}{dt} = r \cdot N \cdot \left(\frac{K - N}{K} \right). \tag{3.2}$$

Исходные параметры модели:

- r — скорость роста численности популяции при отсутствии конкуренции;
- K — предельное значение численности популяции, при котором скорость роста становится равной нулю;
- N_0 — начальная численность популяции.

Межвидовая конкуренция. В этом случае исследуется конкуренция популяций, потребляющих общий ресурс. Пусть N_1 и N_2 — численности конкурирующих популяций. Модель (называемая также моделью Лотки–Вольтерры) выражается уравнениями

$$\begin{cases} \dfrac{dN_1}{dt} = r_1 \cdot N_1 \dfrac{K_1 - N_1 - \alpha_{12} \cdot N_2}{K_1}, \\ \dfrac{dN_2}{dt} = r_2 \cdot N_2 \cdot \dfrac{K_2 - N_2 - \alpha_{21} \cdot N_1}{K_2}. \end{cases} \tag{3.3}$$

Содержательный смысл параметров можно понять из сравнения с предыдущей моделью. Дополнительные параметры α_{12} и α_{21} отражают интенсивность межвидовой конкуренции.

Главный вопрос, который интересует исследователя межвидовой конкуренции — при каких условиях увеличивается или уменьшается численность каждого вида? Данная модель предсказывает следующие режимы эволюции взаимодействующих популяций: устойчивое сосуществование или полное вытеснение одной из них.

Система «хищник–жертва». В этой системе ситуация значительно отличается от предыдущей. В частности, если в случае конкурирующих популяций исчезновение одной означает выигрыш для другой (дополнительные ресурсы), то исчезновение «жертвы» влечет за собой и исчезновение «хищника», для которого в простейшей модели «жертва» является единственным кормом.

Обозначим через C численность популяции хищника и через N — популяции жертвы. Одна из известных моделей выражается следующими уравнениями:

$$\begin{cases} \dfrac{dN}{dt} = r \cdot N - a \cdot C \cdot N, \\ \dfrac{dC}{dt} = f \cdot a \cdot C \cdot N - q \cdot C. \end{cases} \tag{3.4}$$

В первое уравнение заложен следующий смысл. При отсутствии хищников (т.е. при $C = 0$) численность жертв растет экспоненциально со скоростью r, поскольку модель не учитывает внутривидовой конкуренции. Скорость роста числа жертв (т.е. $\dfrac{dN}{dt}$) уменьшается тем больше, чем чаще происходят встречи представителей видов; a — коэффициент эффективности поиска.

Второе уравнение говорит о следующем. При отсутствии жертв численность хищников экспоненциально убывает со скоростью q; положительное слагаемое в правой части уравнения компенсирует эту убыль; f — коэффициент эффективности перехода пищи в потомство хищников.

Задание 3.1

Вариант 0.

Изучить характер эволюции популяции, описываемый моделью (3.1), при значениях параметров $b = 1$, $R = 1$, $N_0 = 100$ в зависимости от значения параметра а в диапазоне 0,1 ≤ а ≤ 10. Есть ли качественные различия в характере эволюции в зависимости от значения a?

Вариант 1.

Изучить характер эволюции популяции, описываемый моделью (3.1), при значениях параметров $b = 1$, $R = 4$, $N_0 = 100$ в зависимости от значения параметра а в диапазоне $0{,}1 \le a \le 10$. Есть ли качественные различия в характере эволюции в зависимости от значения a?

Вариант 2.

Изучить характер эволюции популяции, описываемый моделью (3.1), при значениях параметров $b = 4$, $R = 1$, $N_0 = 100$ в зависимости от значения параметра а в диапазоне $0{,}1 \le a \le 10$. Есть ли качественные различия в характере эволюции в зависимости от значения a?

Вариант 3.

Изучить характер эволюции популяции, описываемый моделью (3.1), при значениях параметров $a = 1$, $R = 1$, $N_0 = 100$ в зависимости от значения параметра b в диапазоне $0{,}1 \le b \le 10$. Есть ли качественные различия в характере эволюции в зависимости от значения b?

Вариант 4.

Изучить характер эволюции популяции, описываемый моделью (3.1), при значениях параметров $a = 1$, $R = 4$, $N_0 = 100$ в зависимости от значения параметра b в диапазоне $0{,}1 \le b \le 10$. Есть ли качественные различия в характере эволюции в зависимости от значения b?

Вариант 5.

Изучить характер эволюции популяции, описываемый моделью (3.1), при значениях параметров $a = 3$, $R = 1$, $N_0 = 100$ в зависимости от значения параметра b в диапазоне $0,1 \le b \le 10$. Есть ли качественные различия в характере эволюции в зависимости от значения b?

Вариант 6.

Изучить характер эволюции популяции, описываемый моделью (3.1), при значениях параметров $a = 3$, $b = 1$, $N_0 = 100$ в зависимости от значения параметра R в диапазоне $1 \le R \le 4$. Есть ли качественные различия в характере эволюции в зависимости от значения R?

Вариант 7.

Изучить характер эволюции популяции, описываемый моделью (3.1), при значениях параметров $a = 3$, $b = 4$, $N_0 = 100$ в зависимости от значения параметра R в диапазоне $1 \le R \le 4$. Есть ли качественные различия в характере эволюции в зависимости от значения R?

Вариант 8.

Реализовать модель (3.1) при следующих наборах значений параметров:

1) $N_0 = 100$, $a = 1$, $R = 2$, $b = 1$;
2) $N_0 = 100$, $a = 1$, $R = 2$, $b = 4$;
3) $N_0 = 100$, $a = 1$, $R = 4$, $b = 3,5$;
4) $N_0 = 100$, $a = 1$, $R = 4$, $b = 4,5$

и изучить вид соответствующих режимов эволюции.

Вариант 9.

Для модели (3.1) в фазовой плоскости (b, R) найти границы зон, разделяющих режим колебательного установления стационарной численности популяции изучаемой системы и режим устойчивых предельных циклов.

Задание 3.2

Вариант 0.

Реализовать моделирование межвидовой конкуренции по формулам (3.3) при значениях параметров $r_1 = 2$, $r_2 = 2$, $K_1 = 200$, $K_2 = 200$, $\alpha_{12} = 0,5$, $\alpha_{21} = 0,5$. Проанализировать зависимость судьбы популяций от соотношения значений их начальной численности N_1^0, N_2^0.

Вариант 1.

Реализовать моделирование межвидовой конкуренции по формулам (3.3) при значениях параметров $r_1 = 2$, $r_2 = 2$, $K_1 = 200$, $K_2 = 200$, $N_1^0 = 100$, $N_2^0 = 100$. Проанализировать зависимость судьбы популяций от соотношения значений коэффициентов конкуренции α_{12} и α_{21}.

Вариант 2.

Построить в фазовой плоскости ( ) границы зон, разделяющих какие-либо два режима эволюции конкурирующих популяций (в соответствии с моделью (3.3)). Остальные параметры модели выбрать произвольно. Учесть при этом, что режим устойчивого сосуществования популяций может в принципе реализоваться только при $\alpha_{12} \cdot \alpha_{21} < 1$.

Вариант 3.

Провести моделирование динамики численности популяций в системе «хищник–жертва» (модель (3.4)) при значениях параметров $r = 5$, $a = 0{,}1$, $q = 2$, $f = 0{,}6$. Проанализировать зависимость исхода эволюции от соотношения значений параметров N_0 и C_0.

Вариант 4.

Провести моделирование динамики численности популяций в системе «хищник–жертва» (модель (3.4)) при значениях параметров $r = 5$, $a = 0{,}1$, $q = 2$, $N_0 = 100$, $C_0 = 6$. Проанализировать зависимость результатов моделирования от значения параметра f в диапазоне $0{,}1 \le f \le 2$.

Вариант 5.

Провести моделирование динамики численности популяций в системе «хищник–жертва» (модель (3.4)) при значениях параметров $r = 5$, $a = 0{,}1$, $f = 2$, $N_0 = 100$, $C_0 = 6$. Проанализировать зависимость результатов моделирования от значения параметра q в диапазоне $0{,}1 \le q \le 2$.

Вариант 6.

Провести моделирование динамики численности популяций в системе «хищник–жертва» (модель (3.4)) при значениях параметров $a = 0{,}1$, $f = 2$, $q = 2$, $N_0 = 100$, $C_0 = 6$. Проанализировать зависимость результатов моделирования от значения параметра q в диапазоне $0{,}1 \le r \le 2$.

Вариант 7.

Модель (3.4) предсказывает сопряженные колебания численности жертв и хищников. Исследовать зависимость запаздывания амплитуд колебаний численности хищников от амплитуд колебаний численности жертв в зависимости от значений параметра a. Значения остальных параметров фиксировать по усмотрению.

Вариант 8.

Модель (3.4) предсказывает сопряженные колебания численности жертв и хищников. Исследовать зависимость запаздывания амплитуд колебаний численности хищников от амплитуд колебаний численности жертв в зависимости от значений параметра q. Значения остальных параметров фиксировать по усмотрению.

Вариант 9.

Модель (3.4) предсказывает сопряженные колебания численности жертв и хищников. Исследовать зависимость запаздывания амплитуд колебаний численности хищников от амплитуд колебаний численности жертв в зависимости от значений параметра f. Значения остальных параметров фиксировать по усмотрению.

МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ ПО ВЫПОЛНЕНИЮ ЗАДАНИЯ 3

1. При проведении расчетов необходим контроль точности результатов и устойчивости применяемого численного метода. Для этого достаточно ограничиться эмпирическими приемами (например, сопоставлением решений, полученных с несколькими разными шагами по времени).

2. Целесообразно применять для моделирования стандартные методы интегрирования систем дифференциальных уравнений, описанные в математической литературе. Простейшие методы (метод Эйлера) часто бывают неустойчивы и их применение ведет к лишнему расходу времени.

3. Результаты моделирования следует выводить на экран компьютера в следующих видах: таблицы зависимостей численности популяций от времени, графики этих зависимостей. Уместны звуковые сигналы (одни — в критические моменты для моделируемого процесса, другие — через некоторый фиксированный отрезок пройденного пути и т.д.).

4. При выводе результатов в табличном виде следует учитывать, что соответствующий шаг по времени не имеет практически ничего общего с шагом интегрирования и определяется удобством и достаточной полнотой для восприятия результатов на экране. Экран, сплошь забитый числами, не поддается восприятию. Выводимые числа следует разумным образом форматировать, чтобы незначащие цифры практически отсутствовали.

5. При выводе результатов в графической форме графики должны быть построены так, как это принято в математической литературе (с указанием того, какие величины отложены по осям, масштабами и т.д.).

6. Поскольку таблицы и графики на одном экране обычно не помещаются, удобно сделать меню, в котором пользователь выбирает желаемый в настоящий момент вид представления результатов.

Порядок выполнения программы.

1. Выписать математическую модель, определить состав набора входных параметров и их конкретные числовые значения.

2. Спроектировать пользовательский интерфейс программы моделирования, обращая особое внимание на формы представления результатов.

3. Выбрать метод интегрирования дифференциальных уравнений модели, найти в библиотеке стандартных программ или разработать самостоятельно программу интегрирования с заданной точностью.

4. Произвести отладку и тестирование полной программы.

5. Выполнить конкретное задание из своего варианта работы.

6. Качественно проанализировать результаты моделирования.

7. Создать текстовый отчет по лабораторной работе.

Задание 4.

Напишите реферат объемом 10 страниц. Тема реферата выбирается по сумме двух последних цифр шифра (например, если шифр БЖТ–1135, то номер варианта 3 + 5 = 8).

1. Теория моделирования: современные проблемы развития.
2. Системный анализ: методологические проблемы исследования.
3. Системный анализ техногенных катастроф.
4. Методы прогнозирования чрезвычайных ситуаций.
5. Методы прогнозирования пожаров и их последствий.
6. Моделирование последствий падения метеорита.
7. Проблемы прогнозирования демографических процессов.
8. Прогнозирование наводнений: проблемы и решения.
9. Модели распространения загрязнений: сфера использования и ограничения.
10. Модели распространения вирусов: сфера использования и ограничения.
11. Экспертные оценки: методы получения и обработки.
12. Моделирование экологического равновесия.
13. Моделирование механизмов государственного регулирования деятельности промышленных предприятий по выбросу вредных веществ.
14. Имитационное моделирование.
15. Информационные технологии для моделирования сложных динамических систем.
16. Задачи адвекции.
17. Основные этапы вывода уравнения атмосферной диффузии.
18. Постановка задачи наблюдаемости для уравнения атмосферной диффузии. Постановка задачи минимизации критерия при заданных ограничениях.

СИСТЕМНЫЙ АНАЛИЗ
И МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССОВ
В ТЕХНОСФЕРЕ

Рабочая программа,
и задание на курсовую работу

Редактор *Д.Н. Тихонычев*
Корректор *В.В. Игнатова*
Компьютерная верстка *О.А. Денисова*

Тип. зак.	Изд. зак. 326	Тираж 500 экз.
Подписано в печать 05.05.08	Гарнитура NewtonC	
Усл. печ. л. 2,25		Формат $60{\times}90_{1/16}$

Издательский центр и Участок оперативной печати
Информационно-методического управления РГОТУПСа,
125993, Москва, Часовая ул., 22/2