

**31/26/1**

Одобрено кафедрой  
«Железнодорожная автоматика,  
телемеханика и связь»

Утверждено  
деканом факультета  
«Управление процессами  
перевозок»

## **МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ СИСТЕМ И ПРОЦЕССОВ**

Рабочая программа  
и задание на контрольную работу  
с методическими указаниями  
для студентов IV курса  
специальности

**190402.65 АВТОМАТИКА, ТЕЛЕМЕХАНИКА И СВЯЗЬ  
НА ЖЕЛЕЗНОДОРОЖНОМ ТРАНСПОРТЕ (ТС)**

*2-е издание, стереотипное*

**Р О А Т**

**Москва — 2011**

Данная рабочая учебная программа дисциплины является типовой и составлена в соответствии с Государственным образовательным стандартом высшего профессионального образования на основании примерной учебной программы данной дисциплины и удовлетворяет государственным требованиям к минимуму содержания и уровню подготовки инженера по специальности 190402.65 Автоматика, телемеханика и связь на железнодорожном транспорте (ТС).

В соответствии с Постановлением Правительства РФ от 14 февраля 2008 г. № 71 «Об утверждении Типового положения об образовательном учреждении высшего профессионального образования (высшем учебном заведении)» рабочая учебная программа обновляется ежегодно.

Обновленная версия рабочей учебной программы размещена на сайте РОАТ (<http://www.rgotups.ru>).

Автор — д-р техн. наук, с.н.с. В.М. Алексеев

---

---

## **1. ЦЕЛЬ И ЗАДАЧИ ДИСЦИПЛИНЫ**

### **1.1. Цель преподавания дисциплины**

1. Дать знания студентам по общим вопросам теории моделирования.

2. Научить методам построения математических моделей и формального описания процессов в контролируемых объектах.

3. Обучить применению математических моделей для построения автоматизированных систем управления транспортными технологическими процессами и решения задач оптимизации структуры и параметров систем.

### **1.2. Задачи изучения дисциплины**

Изучив дисциплину, студент должен:

1.2.1. Ознакомиться с основными понятиями моделирования и теорией подобия, теоретическими положениями и методикой экспериментальных исследований, используемых для построения математических моделей.

1.2.2. Получить навыки постановки задачи моделирования, математического описания моделируемого процесса (объекта), разработки численных методов реализации моделей, моделирования на ЭВМ и применения интегрированных пакетов программ.

1.2.3. Освоить методы подхода к математическому моделированию процессов и объектов, начиная с постановки задачи и кончая составлением программ и практической реализацией математических моделей на ЭВМ.

Материал дисциплины основывается на знаниях, полученных студентами при изучении высшей математики, информатики, численные методов, общенаучных и инженерных дисциплин

---

---

## 2. СОДЕРЖАНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ

№ п/п	Раздел дисциплины	Лекции, ч
1	Общие вопросы теории моделирования	2
2	Методы построения математических моделей	3
3	Применение математических моделей	3

### 2.1. Введение

---

#### Раздел 1. Общие вопросы теории моделирования

2.1.1. Понятие объекта и его модели. Роль моделирования в процессах познавательной и практической деятельности человека.

2.1.2. Понятие математической модели. Формы представления математических моделей. Соответствие математической модели контролируемому объекту. Основные понятия теории подобия. Коэффициенты и критерии подобия.

2.1.3. Классификация моделей, области их применения. Роль математического моделирования в ускорении научно-технического прогресса.

---

#### Раздел 2. Методы построения математических моделей

2.2.1. Основные этапы математического моделирования.

2.2.2. Описание объектов моделирования. Упрощение моделей объекта (идеализация характеристик, допущения). Условия подобия математических моделей и моделируемого процесса (системы).

2.2.3. Построение математических моделей процессов и систем по результатам наблюдений. Полиномиальные и гармонические тренды. Алгоритмы вычислений коэффициентов моделей, рекуррентная идентификация.

2.2.4. Математические модели в механике. Составление дифференциальных уравнений механических систем. Граничные условия и диапазон значений параметров.

2.2.5. Математические модели электрических и магнитных цепей. Построение дифференциальных уравнений электромагнитных процессов. Граничные условия и диапазон значений параметров.

2.2.6. Математические модели систем автоматического управления. Граничные и начальные условия, диапазон значений параметров.

2.2.7. Устойчивость математических моделей ко внешним воздействиям.

2.2.8. Методы реализации математических моделей (аналитические, аналоговые, численные). Применение пакетов прикладных программ.

---

### **Раздел 3. Применение математических моделей**

2.3.1 Натурный (физический) эксперимент. Вычислительный эксперимент. Их преимущества и недостатки.

2.3.2. Задачи оптимизации параметров и структуры систем. Критерии оптимальности. Характеристики и сравнительный анализ методов оптимизации. Примеры оптимизации параметров моделей. Использование пакетов прикладных программ.

### **3. ОБЪЕМ ДИСЦИПЛИНЫ И ВИДЫ УЧЕБНОЙ РАБОТЫ**

Вид учебной работы	Всего часов	Курс
Общая трудоемкость дисциплины	120	IV
Лекции	8	IV
Практические занятия	8	IV
Самостоятельная работа	89	IV
Контрольные работы (количество)	1	IV
Вид итогового контроля		Экзамен

---

---

#### 4. ПРАКТИЧЕСКИЕ ЗАНЯТИЯ

Тема	Часы
Моделирование, математические модели и их особенности. Вычислительный эксперимент	4
Алгоритмы вычислений коэффициентов моделей. Рекуррентная идентификация	2
Решение задач оценки и прогнозирования параметров процессов. Построение алгоритмов вычислений	2

#### 5. САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА

Тема контрольной работ “Оценка параметров линейной модели динамики процесса”. Для выполнения контрольной работы необходимо:

вычислить последовательность коэффициентов  $\hat{v}_0, \hat{a}$  линейной модели динамики процесса;

построить последовательность прогнозируемых значений момента окончания торможения отцепа;

разработать структурную схему алгоритма вычислений и составить программу.

---

#### ЗАДАНИЕ НА КОНТРОЛЬНУЮ РАБОТУ

##### Задача 1

Результаты наблюдений за торможением отцепа представлены выборкой отсчетов скорости его движения по парковой тормозной позиции сортировочной горки. Для микропроцессорной системы управления движением отцепов методом рекуррентной идентификации оценить параметры линейной модели динамики процесса  $v(t) = v_0 + a(t - t_0)$ . По полученным результатам построить прогноз момента окончания торможения. Для этого вычислить:

вычислить последовательность коэффициентов  $\hat{v}_0, \hat{a}$  линейной модели динамики процесса;

построить последовательность прогнозируемых значений момента окончания торможения отцепа;

разработать структурную схему алгоритма вычислений и составить программу.

Расчетная скорость на выходе из замедлителей определяется длиной свободного участка паркового пути, удельным сопротивлением движению отцепа. При выполнении контрольной работы принять эту величину равной  $v_p = 0,8 + 0,1x$  м/с, где  $x$  — последняя цифра учебного шифра. Значения скорости движения отцепа приведены в табл. 1; студент выбирает вариант по последней цифре учебного шифра.

## Задача 2

Для микропроцессорной системы регулирования напряжения контактной сети оценить коэффициенты гармонического тренда  $v(t) = v_0 + v_C \cos \omega t + v_S \sin \omega t$  по результатам измерений, проведенных лабораторией электроснабжения НФ РГОТУПС (табл. 2). По полученным коэффициентам модели построить прогноз момента коммутации обмоток трансформатора. Для этого необходимо:

вычислить последовательность значений коэффициентов  $\hat{v}_0, \hat{v}_C, \hat{v}_S$  гармонического тренда;

построить кривые результатов измерений напряжения сети и гармонической модели суточных изменений напряжения;

определить момент коммутации обмоток трансформатора и по последующим результатам измерений напряжения проверить правильность полученного значения.

Номер варианта выбирается по последней цифре учебного шифра. Для всех вариантов принять напряжение переключения обмоток трансформатора равным 28,3 кВ.

Таблица 1

## Скорость движения отцепа

Время Т, с	Скорость отцепа, м/с (номер варианта)									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
5,5	2,73	2,86	2,95	3,06	3,15	3,26	3,35	3,46	3,55	2,69
5,6	2,73	2,86	2,95	3,06	3,15	2,26	3,35	3,46	3,55	2,69
5,7	2,73	2,86	2,95	3,06	3,15	3,26	3,35	3,46	3,55	2,69
5,8	2,66	2,78	2,88	3,02	3,15	3,26	3,27	3,35	3,47	2,62
5,9	2,66	2,78	2,88	3,02	3,09	3,17	3,27	3,35	3,47	2,62
6,0	2,66	2,78	2,88	3,02	3,09	3,17	3,27	3,35	3,47	2,62
6,1	2,66	2,78	2,86	3,00	3,09	3,17	3,27	3,35	3,47	2,62
6,2	2,66	2,75	2,86	3,00	3,09	3,17	3,21	3,32	3,47	2,62
6,3	2,60	2,75	2,86	2,94	3,09	3,11	3,21	3,32	3,42	2,54
6,4	2,60	2,75	2,84	2,94	3,02	3,11	3,21	3,32	3,42	2,54
6,5	2,60	2,75	2,84	2,94	3,02	3,11	3,21	3,32	3,42	2,54
6,6	2,60	2,75	2,84	2,91	3,02	3,11	3,15	3,32	3,42	2,54
6,7	2,60	2,75	2,84	2,91	3,02	3,11	3,15	3,27	3,34	2,54
6,8	2,53	2,67	2,79	2,91	2,95	3,05	3,15	3,27	3,34	2,49
6,9	2,53	2,67	2,79	2,91	2,95	3,05	3,15	3,27	3,34	2,49
7,0	2,53	2,67	2,77	2,86	2,95	3,05	3,12	3,27	3,34	2,49
7,1	2,53	2,67	2,77	2,86	2,95	3,05	3,12	3,27	3,34	2,49
7,2	2,53	2,67	2,77	2,86	2,90	3,05	3,12	3,18	3,26	2,42
7,3	2,46	2,60	2,70	2,78	2,90	2,97	3,12	3,18	3,26	2,42
7,4	2,46	2,60	2,70	2,78	2,85	2,97	3,06	3,18	3,26	2,42
7,5	2,35	2,48	2,58	2,67	2,75	2,87	2,95	3,06	3,17	2,33
7,6	2,27	2,42	2,50	2,60	2,69	2,78	2,87	2,97	3,09	2,26
7,7	2,20	2,36	2,43	2,54	2,62	2,72	2,81	2,91	3,01	2,16
7,8	2,13	2,27	2,35	2,45	2,55	2,65	2,74	2,84	2,92	2,09
7,9	2,02	2,14	2,24	2,34	2,43	2,53	2,63	2,73	2,83	2,01
8,0	1,89	2,03	2,12	2,21	2,31	2,40	2,49	2,64	2,72	1,85
8,1	1,80	1,94	2,03	2,12	2,23	2,32	2,41	2,53	2,61	1,76
8,2	1,69	1,82	1,92	2,00	2,11	2,19	2,30	2,39	2,48	1,65
8,3	1,55	1,68	1,79	1,87	1,97	2,08	2,17	2,28	2,36	1,52
8,4	1,47	1,61	1,70	1,78	1,89	1,97	2,08	2,17	2,27	1,43
8,5	1,35	1,51	1,58	1,67	1,78	1,87	1,96	2,06	2,16	1,32
8,6	1,22	1,35	1,45	1,54	1,66	1,73	1,83	1,94	2,04	1,18
8,7	1,20	1,33	1,43	1,52	1,62	1,71	1,80	1,91	2,01	1,15
8,8	1,09	1,25	1,31	1,41	1,51	1,62	1,69	1,80	1,90	1,06
8,9	1,07	1,22	1,29	1,39	1,47	1,58	1,66	1,76	1,88	1,03
9,0	0,93	1,07	1,15	1,25	1,35	1,45	1,55	1,65	1,74	0,90
9,1	0,87	1,02	1,09	1,22	1,29	1,38	1,47	1,58	1,67	0,84
9,2	0,80	0,95	1,03	1,12	1,23	1,33	1,42	1,54	1,62	0,78
9,3	0,80	0,95	1,03	1,12	1,19	1,27	1,42	1,54	1,62	0,76
9,4	0,80	0,95	1,03	1,12	1,17	1,27	1,42	1,54	1,62	0,76
9,5	0,80	0,95	1,00	1,12	1,17	1,27	1,42	1,54	1,62	0,76
9,6	0,80	0,95	1,00	1,12	1,17	1,27	1,42	1,54	1,62	0,76
9,7	0,80	0,95	1,00	1,09	1,17	1,27	1,38	1,54	1,62	0,76
9,8	0,80	0,77	1,00	1,09	1,14	1,25	1,38	1,45	1,62	0,70
9,9	0,80	0,77	0,95	1,09	1,14	1,25	1,38	1,45	1,55	0,70
10,0	0,73	0,77	0,95	1,09	1,14	1,25	1,38	1,45	1,55	0,70

Таблица 2

## Напряжение контактной сети

Время Т, ч	Напряжение сети, В (номер варианта)									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
0,5	28223	28280	28266	28144	28110	27985	28206	28497	28237	28299
1,0	27837	27869	27651	27658	27775	27815	27995	27950	28430	28138
1,5	27878	27880	27998	27859	27862	28113	28029	27758	27641	27861
2,0	27428	27619	28028	28112	28166	27929	27850	27880	27364	27765
2,5	27654	27858	27794	28005	28106	28034	27700	27995	27661	27307
3,0	27657	27995	28181	28128	28221	27894	27644	28022	28454	28483
3,5	27367	27195	27442	27914	28216	28030	27777	28085	28043	28195
4,0	28029	27765	27708	27848	28071	27978	28075	27978	27741	27633
4,5	27349	27347	27048	27299	27895	27560	27133	26885	26773	24854
5,0	26970	27213	27612	27684	27337	27145	27025	27579	27509	27630
5,5	28302	28547	28173	28155	27951	28223	28118	28191	28127	27806
6,0	28267	28264	28025	27919	28256	28338	28253	28479	28158	28507
6,5	28217	28382	28530	28472	28399	28606	28622	28532	28390	28351
7,0	28439	28417	28104	28315	27863	27452	27186	27486	27941	27815
7,5	28813	28860	28681	28839	28985	29096	28889	28898	28767	28914
8,0	27996	28730	28422	28241	28426	28098	28263	27917	27985	27729
8,5	27193	27446	27329	27465	27351	27654	28182	28043	28189	28060
9,0	28298	28374	28305	28043	27893	27909	27856	28044	28152	28189
9,5	27776	27671	27676	27557	27878	27820	28007	28045	27878	28044
10,0	27812	27792	27761	27486	27310	27849	27511	27742	27592	27397
10,5	28068	28484	28423	28183	28146	28197	28313	28313	28232	28276
11,0	28052	28264	28242	28249	28198	28337	28561	28699	28604	28670
11,5	28792	28775	28772	28773	28840	28545	28414	28231	28855	28107
12,0	28825	28767	28386	28356	28289	28171	28359	28479	28499	28262
12,5	28555	28317	28312	28297	28559	28468	28599	28490	28227	28142
13,0	27703	28313	28672	28628	28100	28283	28262	28253	28246	27942
13,5	28493	28278	28674	28550	28185	28167	28018	27849	27996	28220
14,0	27827	28073	28209	27982	28393	28453	28293	28154	27891	28255
14,5	28655	28225	28124	28266	28255	28667	28714	28674	28967	28652
15,0	28719	28448	28537	28499	28394	28389	28609	28404	28109	28543
15,5	28559	28557	28445	28237	28435	28336	28535	28526	28470	28519
16,0	28325	28297	28434	28088	28089	27879	27937	28412	28345	28308
16,5	28095	28076	28168	28264	27990	27991	28164	28058	28376	28246
17,0	28510	28459	27982	28227	28597	28443	28283	28163	28235	28184
17,5	27996	28135	28290	28069	27972	27965	27864	28179	28091	27641
18,0	28706	28967	28920	28641	28292	28130	28421	28652	28803	28890
18,5	28952	28710	28529	28319	28292	28588	28504	28501	28269	28330
19,0	28018	27794	27940	28016	28245	28244	28380	28541	28153	28220
19,5	27798	28141	28160	28501	28592	28218	28264	28341	28556	28490
20,0	28486	28598	28607	28716	28739	28626	28688	28667	28470	28371
20,5	28376	28539	28641	28566	28488	28282	28129	28107	28868	28825
21,0	28071	27927	28116	28268	28416	28311	28120	28011	27954	28048
21,5	28388	28213	28259	28285	28159	27976	27776	27547	28171	28235
22,0	27734	27011	27086	27142	27530	27832	27794	27649	27669	27448
22,5	28072	27982	27734	27901	28371	28410	28462	28445	28430	28182
23,0	27719	27794	28060	28160	28151	27905	27806	27988	28031	28191
23,5	28484	28517	28464	28133	28223	28275	28335	28229	28095	28133
24,0	28508	28524	28431	28439	28410	28444	28430	28203	28141	27932

---

---

## МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ К КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЕ

Вопросами поиска исходного семейства математических уравнений, адекватного прикладной задаче, занимается теория структурной идентификации. Она представляет собой совокупность методов построения моделей сложных технических систем по априорной информации и апостериорным результатам наблюдений.

В условиях, когда неизвестен ряд существенных параметров и факторов, технологический процесс анализируется на основе полученной информации. Нужный закон управления отыскивается опытным путём по реакции системы в процессе функционирования на поданное управляющее воздействие. Общая ситуация характеризуется тем, что некоторые зависимости, которые, по-видимому, объективно существуют, заданы конечным набором количественных данных. Обобщение этих данных означает их интерполяцию или экстраполяцию на некоторые новые условия.

Системные закономерности в целом и, в частности, теория идентификации являются абсолютно необходимыми подсистемами теории управления. Речь идёт, прежде всего, о разработке новых весьма наукоёмких технологий решения актуальных прикладных задач:

управления транспортными технологическими процессами по их физическим моделям на основе адаптивной аппроксимации кривых динамики процессов;

эффективного оценивания параметров процессов методами рекуррентной идентификации со специальным выбором аппроксимирующих функций;

построения планово-экономических и организационных моделей на основе методологии обобщённого решения задач управления и др.

Для управления транспортными технологическими процессами требуются математические модели, позволяющие обрабатывать результаты наблюдений в реальном масшта-

бе времени. Выбор математической модели определяется характером поставленной задачи управления, возможностями численного её решения в жёстких условиях реального масштаба времени. Представляют интерес наиболее простые модели, адекватно описывающие процесс и позволяющие решать поставленную задачу при невысоких требованиях к быстродействию цифровых устройств обработки информации.

Процессы управления относятся, как правило, к числу локально-стационарных процессов. Свойства системы изменяются со временем и параметры процессов остаются постоянными лишь на конечных временных интервалах, поэтому алгоритмы идентификации должны отслеживать эти изменения, что является важной причиной использования методов рекуррентной идентификации.

Среди вопросов, возникающих при изучении работы технологических систем, могут быть следующие:

Каков прогноз нескольких последующих значений выходных параметров процесса?

Каким следует выбрать входное воздействие на очередном шаге управления?

Следует ли изменять режимы обработки информации?

Выбор модели является наиболее важной и в то же время наиболее трудной частью процедуры идентификации. Именно на этом этапе происходит соединение знания формальных свойств моделей с априорным знанием, инженерным искусством. Интуиция и жизненный опыт лица, принимающего решение, играют существенную роль в процессе структурной идентификации.

Реальная транспортная система отличается от принимаемой математической модели. Приемлемость модели, соответствие решаемой задаче следует понимать не в плане ее истинности, а скорее в плане полезности. Модель следует рассматривать как способ достаточно хорошего описания тех аспектов поведения системы, которые в данном случае представляют интерес.

Поиск компромисса между требованиями высокой точности оценок и малых затрат времени на вычисления определил интерес к рекуррентным алгоритмам обработки информации. Алгоритмы формируют грубые оценки за малый промежуток времени и постепенно, шаг за шагом, уточняют их по мере поступления новых данных. При этом нет необходимости хранить в памяти цифровых устройств ранее полученные отсчёты контролируемой величины.

**Задача 1.** Приближение равнопеременного движения широко используется при описании динамики транспортных объектов. Его отличительной особенностью является линейный закон изменений скорости движения. На небольшом интервале наблюдений линейная модель служит хорошим приближением реальной более сложной функциональной зависимости скорости движения от времени. Линейное приближение позволяет оценивать параметры движения и прогнозировать динамику развития транспортных процессов.

Линейная модель изменений скорости движения объекта представляет собой суперпозицию полиномов нулевого  $\varphi_0(t) = 1$  и первого  $\varphi_1(t) = t - t_0$  порядков, взятых с весами  $v_0$  и  $a$ , соответственно. Она имеет вид

$$v(t) = v_0 + a(t - t_0).$$

Коэффициенты модели  $v_0$  и  $a$  характеризуют скорость в момент времени  $t = t_0$  и ускорение движения объекта, соответственно.

Оценки коэффициентов теоретической модели  $\hat{v}_0, \hat{a}$  вычисляются по результатам наблюдений, представленных последовательностью значений скорости движения объекта  $v_i$  в дискретные моменты времени  $t_i$ . Их оптимальные значения определяются условиями минимума квадратичного функционала, представляющего собой сумму квадратов отклонений результатов наблюдений от принятой теоретической модели:

$$U = \sum_{i=1}^n [v_i - \hat{v}_0 - \hat{a}(t_i - t_0)]^2.$$

Условия равенства нулю производных  $\partial U/\partial \hat{v}_0 = 0$ ,  $\partial U/\partial \hat{a} = 0$  приводят к системе линейных алгебраических уравнений для вычислений коэффициентов модели:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^n [v_i - \hat{v}_0^{[n]} - \hat{a}^{[n]}(t_i - t_0^{[n]})] = 0 \\ \sum_{i=1}^n [v_i - \hat{v}_0^{[n]} - \hat{a}^{[n]}(t_i - t_0^{[n]})](t_i - t_0^{[n]}) \end{cases} \quad (1)$$

Наличие верхних индексов подчеркивает зависимость коэффициентов модели от объёма выборки  $n$ . В канонической форме записи система уравнений имеет вид

$$\begin{cases} \hat{v}_0^{[n]} n + \sum_{i=1}^n (t_i - t_0^{[n]}) v_i = \sum_{i=1}^n v_i \\ \hat{v}_0^{[n]} \sum_{i=1}^n (t_i - t_0^{[n]}) + \hat{a}^{[n]} \sum_{i=1}^n (t_i - t_0^{[n]})^2 = \sum_{i=1}^n v_i (t_i - t_0^{[n]}) \end{cases}$$

Процедура переноса начала отсчёта времени  $t_0^{[n]}$  в центр выборки, известная как центрирование аргумента, уменьшает значения коэффициентов системы уравнений. Условие ортогональности полиномов  $\varphi_0(t)$  и  $\varphi_1(t)$  на множестве отсчётов времени

$$\sum_{i=1}^n \varphi_0(t_i) \varphi_1(t_i) = 0$$

позволяет записать уравнение для вычислений абсциссы центра выборки

$$\sum_{i=1}^n (t_i - t_0^{[n]}) = 0. \quad (2)$$

Перенос начала отсчёта аргумента в центр выборки обращает в ноль второй член первого уравнения и первый — второго. Матрица системы уравнений получает диагональный вид, и система распадается на два независимых уравнения для вычислений искоемых коэффициентов линейной модели:

$$\hat{v}_0^{[n]} = \sum_{i=1}^n v_i / n,$$

$$\hat{a}^{[n]} = \sum_{i=1}^n v_i (t_i - t_0^{[n]}) / (t_i - t_0^{[n]})^2.$$

Абсцисса центра выборки является средним значением выборки отсчётов времени:

$$t_0^{[n]} = \sum_{i=1}^n t_i / n.$$

Необходимость в обработке информации в реальном масштабе времени в информационно-измерительных каналах систем управления предопределила интерес к рекуррентным алгоритмам вычислений коэффициентов модели, позволяющим получать грубые оценки на начальном этапе обработки информации и постепенно уточнять их по мере поступления новых результатов наблюдений.

С учетом условия ортогональности (2) матрица система уравнений (1) может быть представлена в треугольном виде:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^n (v_i - \hat{v}_0^{[n]}) = 0 \\ \sum_{i=1}^n [v_i - \hat{v}_0^{[n]} - \hat{a}^{[n]}(t_i - t_0^{[n]})](t_i - t_0^{[n]}) = 0 \end{cases} \quad (3)$$

Левую часть первого уравнения разложим в ряд Тейлора в точке  $\hat{v}_0^{[n]} = \hat{v}_0^{[n-1]}$ . Уравнение получает вид

$$\sum_{i=1}^n (v_i - \hat{v}_0^{[n-1]}) - (\hat{v}_0^{[n]} - \hat{v}_0^{[n-1]})n = 0.$$

Разрешив относительно  $\hat{v}_0^{[n]}$ , приходим к рекуррентному соотношению вида

$$\hat{v}_0^{[n]} = \hat{v}_0^{[n-1]} + \sum_{i=1}^n (v_i - \hat{v}_0^{[n-1]}) / n$$

Вынесем последнее слагаемое из-под знака суммы:

$$\sum_{i=1}^n (v_i - \hat{v}_0^{[n-1]}) = \sum_{i=1}^{n-1} (v_i - \hat{v}_0^{[n-1]}) + v_n - \hat{v}_0^{[n-1]}$$

Записанная в правой части равенства сумма первых  $n-1$  разностей равна нулю, поскольку оценка  $\hat{v}_0^{[n-1]}$  является средним значением для выборки объёмом  $n-1$  отсчётов контролируемого параметра процесса.

После выполненных преобразований рекуррентное соотношение получает компактный вид:

$$\hat{v}_0^{[n]} = \hat{v}_0^{[n-1]} + \frac{v_n - \hat{v}_0^{[n-1]}}{n}.$$

Новое значение оценки для выборки объёмом  $n$  отсчётов контролируемой величины равно сумме прежнего её значения для выборки объёмом  $n-1$  отсчётов и небольшого поправочного члена, который определяется разностью между вновь поступившим отсчётом и прежним значением оценки.

Левую часть второго уравнения системы (3) разложим в ряд Тейлора в точке  $\hat{v}_0^{[n]} = \hat{v}_0^{[n-1]}$ ,  $\hat{a}^{[n]} = \hat{a}^{[n-1]}$ . Уравнение получает вид

$$\sum_{i=1}^n [v_i - \hat{v}_0^{[n-1]} - \hat{a}^{[n-1]}(t_i - t_0^{[n]})](t_i - t_0^{[n]}) - (\hat{a}^{[n]} - \hat{a}^{[n-1]}) \sum_{i=1}^n (t_i - t_0^{[n]})^2 = 0.$$

В соотношении отсутствует третье слагаемое, оно равно нулю в силу ортогональности базисных функций (2).

Разрешив относительно искомой величины, приходим к рекуррентному соотношению следующего вида:

$$\hat{a}^{[n]} = \hat{a}^{[n-1]} + \frac{\sum_{i=1}^n [v_i - \hat{v}_0^{[n-1]} - \hat{a}^{[n-1]}(t_i - t_0^{[n]})](t_i - t_0^{[n]})}{\sum_{i=1}^n (t_i - t_0^{[n]})^2}.$$

Выделив отдельно последнее слагаемое, преобразуем сумму, записанную в числителе соотношения:

$$\sum_{i=1}^n [v_i - \hat{v}_0^{[n-1]} - \hat{a}^{[n-1]}(t_i - t_0^{[n]})](t_i - t_0^{[n]}) = [v_n - \hat{v}_0^{[n-1]} - \hat{a}^{[n-1]}(t_n - t_0^{[n-1]})](t_n - t_0^{[n]})$$

Остальные слагаемые в правой части соотношения равны нулю в силу условий ортогональности базисных полиномов и оптимальности оценок для выборок объёмом  $n-1$  и  $n$  отсчётов контролируемого параметра процесса.

По завершении преобразований соотношение приобретает компактный вид:

$$\hat{a}^{[n]} = \hat{a}^{[n-1]} + \frac{v_n - \hat{v}_0^{[n-1]} - \hat{a}^{[n-1]}(t_n - t_0^{[n-1]})}{\sum_{i=1}^n (t_i - t_0^{[n]})^2} (t_n - t_0^{[n]})$$

Алгоритм вычислений реализует идею метода прогноза-коррекции: новое значение производной для выборки объёмом  $n$  отсчётов контролируемого параметра процесса равно сумме прежнего её значения и небольшого поправочного члена, который определяется разностью между вновь поступившим отсчётом и прогнозируемым значением, вычисленным по значениям коэффициентов модели на предыдущем шаге вычислений. В случае их совпадения поправка равна нулю и оценка сохраняет своё прежнее значение.

Положение центра выборки постепенно смещается по мере поступления новых отсчётов контролируемой величины. Его абсцисса может быть вычислена с помощью рекуррентного соотношения

$$t_0^{[n]} = t_0^{[n-1]} + \frac{t_n - t_0^{[n-1]}}{n}.$$

Для центрированной суммы квадратов отсчётов времени справедливо следующее рекуррентное соотношение

$$\sum_{i=1}^n (t_i - t_0^{[n]})^2 = \sum_{i=1}^n (t_i - t_0^{[n-1]})^2 + (t_n - t_0^{[n-1]})(t_n - t_0^{[n]}).$$

Момент окончания торможения отцепы определяется условием равенства расчётного  $v_p$  и фактического значений скорости движения отцепы на выходе из парковой тормозной позиции. Прогноз момента растормаживания замедлителей представлен на рис. 1. Управление тормозными замед-

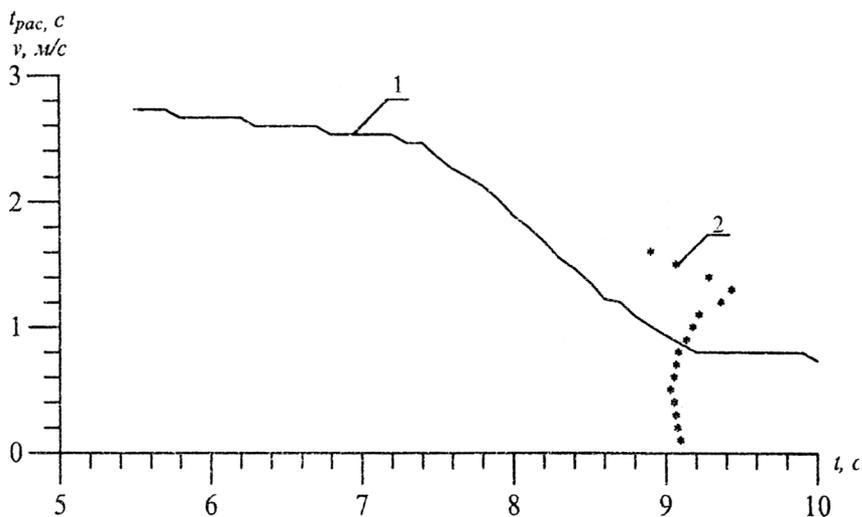


Рис. 1. Прогноз момента растормаживания замедлителей

лителями базируется на прогнозе движения отцепа по полученным характеристикам торможения  $v_p = \hat{v}_0 + \hat{a}(t_p - t_0)$ , откуда следует выражение для момента окончания торможения:

$$t_p = t_0 + \frac{v_p - \hat{v}_0^{[n]}}{\hat{a}^{[n]}}.$$

Применение линейной модели позволяет прогнозировать динамику процесса, учитывая при этом инерционность исполнительных механизмов в системах управления транспортными технологическими процессами. Применение оптимальных методов обработки информации многократно снижает влияние случайных факторов и повышает точность управления.

**Задача 2.** Гармонические модели применяются в случае доминирующего влияния периодической составляющей на динамику изменений контролируемого параметра процесса. Задача идентификации состоит в построении наилучшего приближения кривой динамики процесса одной или несколь-

кими гармоническими функциями. Периоду изменений контролируемого параметра  $T$  соответствует частота первой гармоники  $\omega = 2\pi/T$ . В случае отсутствия достоверной информации о начальной фазе следует воспользоваться теоретической моделью следующего вида:

$$v(t) = v_0 + v_C \cos \omega t + v_S \sin \omega t .$$

Модель состоит из трех базисных функций  $\varphi_0(t)=1$ ,  $\varphi_1 = \cos \omega t$ ,  $\varphi_2 = \sin \omega t$ . Коэффициенты модели  $v_0$ ,  $v_S$ ,  $v_C$  вычисляются по результатам наблюдений за динамикой процесса, представленным выборкой объемом  $n$  отсчетов контролируемого параметра процесса  $v_i$ , выполненных в дискретные моменты времени  $t_i$ . Оптимальные оценки коэффициентов  $\hat{v}_0$ ,  $\hat{v}_S$ ,  $\hat{v}_C$  минимизируют квадратичный функционал:

$$U = \sum_{i=1}^n (v_i - \hat{v}_0 - \hat{v}_C \cos \omega t_i - \hat{v}_S \sin \omega t_i)^2 .$$

Из условий минимума функционала  $\partial U / \partial \hat{v}_0 = 0$ ,  $\partial U / \partial \hat{v}_C = 0$ ,  $\partial U / \partial \hat{v}_S = 0$  следует система трех линейных алгебраических уравнений для вычисления коэффициентов модели:

$$\sum_{i=1}^n (v_i - \hat{v}_0 - \hat{v}_S \sin \omega t_i - \hat{v}_C \cos \omega t_i) = 0 ;$$

$$\sum_{i=1}^n (v_i - \hat{v}_0 - \hat{v}_S \sin \omega t_i - \hat{v}_C \cos \omega t_i) \sin \omega t_i = 0 ;$$

$$\sum_{i=1}^n (v_i - \hat{v}_0 - \hat{v}_S \sin \omega t_i - \hat{v}_C \cos \omega t_i) \cos \omega t_i = 0 .$$

В канонической форме записи система уравнений имеет вид:

$$\hat{v}_0 n + \hat{v}_C \sum_{i=1}^n \cos \omega t_i + \hat{v}_S \sum_{i=1}^n \sin \omega t_i = \sum_{i=1}^n v_i ;$$

$$\hat{v}_0 \sum_{i=1}^n \cos \omega t_i + \hat{v}_C \sum_{i=1}^n \cos^2 \omega t_i + \hat{v}_S \sum_{i=1}^n \sin \omega t_i \cos \omega t_i = \sum_{i=1}^n v_i \cos \omega t_i ;$$

$$\hat{v}_0 \sum_{i=1}^n \sin \omega t_i + \hat{v}_C \sum_{i=1}^n \sin \omega t_i \cos \omega t_i + \hat{v}_S \sum_{u=1}^n \sin^2 \omega t_i = \sum_{i=1}^n v_i \sin \omega t_i$$

В системах автоматического регулирования интервал стационарности меньше периода изменений контролируемого параметра процесса и условие ортогональности базисных функций, как правило, не выполняется для полученной выборки результатов наблюдений за динамикой процесса. Матрица системы уравнений не является диагональной и вычисление искомых коэффициентов выполняется методами Крамера, Гаусса или Зейделя.

Гармоническая модель позволяет решать задачу цифрового регулирования напряжения контактной сети. Из-за суточных изменений напряжения возникает необходимость коммутации обмоток трансформатора. Она осуществляется в зависимости от соотношения между максимально допустимым значением напряжения  $v_{MAX}$  и текущим значением тренда. В микропроцессорном блоке регулирования сигнал на переключение обмоток формируется в момент  $t_{\Pi}$ , когда функция  $F(t) = v_{MAX} - \hat{v}_0 - \hat{v}_C \cos \omega t - \hat{v}_S \sin \omega t$  меняет знак. Аналогичное соотношение определяет момент переключения при пересечении трендом нижнего значения напряжения  $v_{MIN}$  (рис. 2).

Метод Ньютона позволяет построить рекуррентный алгоритм вычислений значений корня функции  $F(t)$ . Два последовательных значения корня  $t_{\Pi}^{[k]}, t_{\Pi}^{[k+1]}$  связаны соотношением следующего вида:

$$t_{\Pi}^{[k+1]} = t_{\Pi}^{[k]} - \frac{v_{MAX} - \hat{v}_0 - \hat{v}_C \cos \omega t_{\Pi}^{[k]} - \hat{v}_S \sin \omega t_{\Pi}^{[k]}}{\omega(\hat{v}_C \sin \omega t_{\Pi}^{[k]} - \hat{v}_S \cos \omega t_{\Pi}^{[k]})}$$

Соотношение уточняет момент пересечения тренда с заданным максимально допустимым значением напряжения. Вместе с тем соотношение позволяет построить последовательность прогнозируемых значений  $t_{\Pi}$  по непрерывно уточняемым по мере поступления новых данных коэффици-

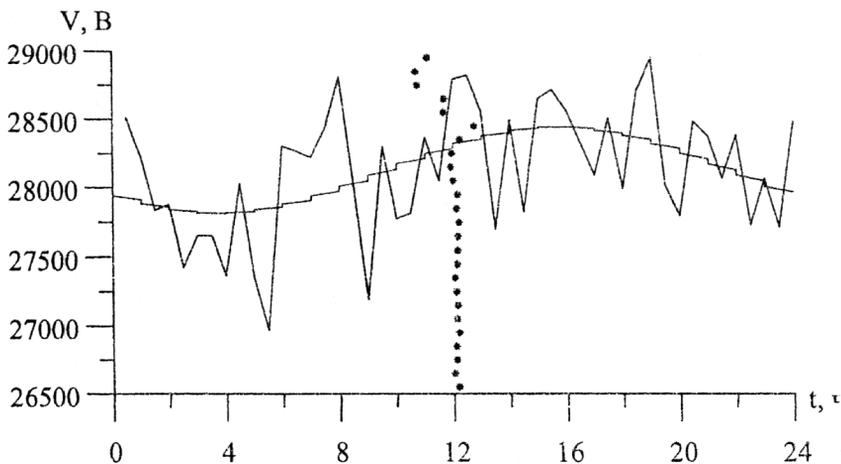


Рис.2. Прогноз момента переключения напряжения

ентам гармонической модели. В качестве исходного приближения при вычислении первого значения момента переключения обмоток трансформатора следует выбрать точку примерно в середине нарастающего участка тренда.

---

---

## РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА

### Основная

1. Советов Б.Я., Яковлев С.А. Моделирование систем. — М.: Высшая школа, 1998.
2. Панкратов Л.В. Адаптивные модели транспортных технологических процессов. — М.: РГОТУПС, 2001.
3. Клейман Е.Г. Идентификация нестационарных объектов. Автоматика и телемеханика, 1999, № 10, с.3.

### Дополнительная

1. Голечков Ю.И. Руководство по освоению интегрированных систем MathCAD 6.0<sup>+</sup> и Maple V R4. — М.: РГОТУПС, 2002.
2. Колемаев В.А., Староверов О.В., Турундаевский В.Б. Теория вероятностей и математическая статистика. — М.: Высшая школа, 1991.
3. Козлов П.А. Новый этап в разработке автоматизированных систем управления. Автоматика, связь, информатика, 2000, № 4, с. 2.
4. Козлов П.А. Информационные технологии для новой эксплуатационной модели управления перевозками. Автоматика, связь, информатика, 2001, № 4, с. 2.
5. Гинсберг К.С., Лотоцкий В.А. Международная конференция «Идентификация систем и задачи управления» (SICPRO'2000). Автоматика и телемеханика, 2001, № 12, с. 129.

# МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ СИСТЕМ И ПРОЦЕССОВ

Рабочая программа  
и задание на контрольную работу  
с методическими указаниями

Редактор *В.И. Чучева*  
Компьютерная верстка *Н.Ф. Цыганова*

---

Тип. зак. 532

Подписано в печать 09.06.11

Усл. печ. л. 1,5

Гарнитура Times

Тираж 300 экз.

Формат 60×90<sup>1</sup>/<sub>16</sub>

---

Редакционный отдел  
Информационно-методического управления РОАТ,  
125993, Москва, Часовая ул., 22/2

Участок оперативной печати  
Информационно-методического управления РОАТ,  
125993, Москва, Часовая ул., 22/2