

МПС РОССИИ
РОССИЙСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ОТКРЫТЫЙ
ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ПУТЕЙ СООБЩЕНИЯ

31/13/11

Одобрено кафедрой
«Транспортная связь»

Утверждено
деканом факультета
«Управление процессами
перевозок»

ТЕОРИЯ ПЕРЕДАЧИ СИГНАЛОВ

Методические указания
по проведению практических занятий
для студентов IV курса

специальности

210700 АВТОМАТИКА, ТЕЛЕМЕХАНИКА И СВЯЗЬ
НА ЖЕЛЕЗНОДОРОЖНОМ ТРАНСПОРТЕ (АТС)



Москва – 2003

Составитель — канд. техн. наук, проф. КОСЕНКО С.С.
Рецензент — д-р техн. наук, проф. КОСИЛОВ Р.А.

Общие указания

В учебных планах специальности АТС предусмотрено проведение практических занятий по курсу "Теория передачи сигналов железнодорожной автоматики, телемеханики и связи". Этот курс является основным теоретическим введением для всех специализаций данной специальности.

Инженерам, разрабатывающим и эксплуатирующим устройства автоматики, связи и радио необходимо знание основных процессов и закономерностей преобразования, передачи, обработки и отображения электрических сигналов. Систематическое изложение этих вопросов составляет основное содержание курса ТПС.

Каждый студент на практических занятиях решает задачи по тому варианту задания (см. табл. 1), номер которого совпадает с двумя последними цифрами его шифра. Последняя задача выполняется по данным первых двух задач.

Работа, выполненная студентом по варианту, не отвечающему шифру, не засчитывается.

Задача 1

1. Найти спектр амплитуд и спектр фаз периодического сигнала, приведенного в табл. 2. Полученные спектры изобразить в виде спектральных линий, длины которых пропорциональны амплитудам и фазам гармоник.

2. Определить полосу частот спектра сигнала ΔF , учитывая составляющие спектра, которые имеют не менее 10% максимальной амплитуды спектра.

Указания к решению задачи 1

Приступая к выполнению данной задачи, студент должен изучить вопросы спектрального анализа сигналов, твердо усвоить и отчетливо представлять, что такое амплитудный и фазовый спектры сигнала, их физический смысл и практическое значение, а также овладеть приемами расчета, включая способы раскрытия неопределенностей, особенности расчета спектра сигналов, описываемых четными и нечетными функциями и т.д. С целью облегчения студенту работы с литературой ниже даются краткое введение в спектральный анализ и примеры расчета, показывающие целесообразную последовательность изучения материала и рассматривающие наиболее сложные моменты определения спектра сигналов.

Как известно из высшей математики, любая периодическая функция $f(t)$ с периодом T , удовлетворяющая условиям Дирихле, может быть разложена в интервале $(0, T)$ или $(-T/2; T/2)$ в ряд Фурье

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\omega t + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin n\omega t, \quad (1)$$

где a_0, a_n, b_n — коэффициенты ряда Фурье, которые вычисляются по следующим формулам:

$$a_0 = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) dt = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) dt, \quad (2)$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos nwt dt = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cos nwt dt, \quad (3)$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin nwt dt = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \sin nwt dt, \quad (4)$$

где $w = \frac{2\pi}{T}$ — круговая частота.

Для практических целей удобно объединить косинусоидальные и синусоидальные колебания одинаковой частоты в одно колебание.

$$a_n \cos nwt + b_n \sin nwt = A_n \sin(nwt + \varphi_n), \quad (5)$$

где

$$A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}; \varphi_n = \arctg \frac{a_n}{b_n} \quad (6)$$

С учетом (5) ряд (1) может быть записан в виде

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(nwt + \varphi_n) \quad (7)$$

Колебание вида $A_n \sin(nwt + \varphi)$ называется гармоническим, поэтому ряд Фурье также называют гармоническим. Совокупность гармоник ряда (7), представляющего функцию $f(t)$, называют ее спектром или чаще спектром сигнала, который описывается данной функцией. Различают амплитудный спектр (совокупность амплитуд A_n) и фазовый спектр (совокупность начальных фаз φ_n).

Расчет амплитудного и фазового спектров может быть выполнен по формулам (2), (3), (4) и (6).

Следует иметь в виду, что при расчете может иметь место неопределенность при некоторых значениях n . Порядок расчета с раскрытием неопределенности показан в примере 2. Ниже поясняется порядок расчета амплитудного и фазового спектров на примере прямоугольного импульса постоянного тока.

Пример 1. Требуется найти аналитическое выражение и построить амплитудный и фазовый спектры сигнала, показанного на рис. 1, а.

Для этого необходимо разложить в ряд Фурье в интервале $(0, T)$ функцию $f(t)$, описывающую данный сигнал.

В соответствии с общим правилом по формулам (2)-(4) вычисляем коэффициенты ряда

$$a_0 = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) dt = \frac{2}{T} \int_0^{t_u} U_m dt = \frac{2U_m}{T} t \Big|_0^{t_u} = \frac{2U_m t_u}{T}.$$

Интеграл берем в интервале от 0 до t_u , так как $f(t)=0$ на отрезке от t_u и до T и, следовательно,

$$\int_{t_u}^T f(t) dt = 0.$$

Аналогично вычисляются коэффициенты a_n и b_n :

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos nwt dt = \frac{2}{T} \int_0^{t_u} U_m \cos nwt dt = \\ &= \frac{2U_m}{T} \frac{\sin nwt}{nw} \Big|_0^{t_u} = \frac{2U_m}{T} \frac{\sin nwt_u}{nw} = \\ &= \frac{2U_m}{T} \frac{T \sin nwt_u}{n \cdot 2\pi} = \frac{U_m}{n\pi} \sin nwt_u; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin nwt dt = \frac{2}{T} \int_0^{t_u} U_m \sin nwt dt = \\ &= \frac{2U_m}{T} \left(-\frac{\cos nwt}{nw} \right) \Big|_0^{t_u} = \frac{U_m}{n\pi} (1 - \cos nwt_u). \end{aligned}$$

Для нахождения амплитудного спектра сигнала необходимо вычислить амплитуду A_n каждой гармонической составляющей сигнала, определяемой суммой двух колебаний

одной частоты, но сдвинутых друг относительно друга на 90° , а именно

$$\begin{aligned}
 & a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t \\
 A_n &= \sqrt{a_n^2 + b_n^2} = \frac{U_m}{n\pi} \sqrt{\sin^2 n\omega t_u + (1 - \cos n\omega t_u)^2} = \\
 &= \frac{U_m}{n\pi} \sqrt{2 - 2\cos n\omega t_u} = \frac{2U_m}{n\pi} \sin \frac{n\omega t_u}{2}
 \end{aligned}$$

Подставив значения $t_u = \frac{T}{3}$ и $\omega = \frac{2\pi}{T}$ в найденное выше выражение, получим

$$\begin{aligned}
 A_n &= \frac{2U_m}{\pi} - \frac{1}{n} \sin \frac{\pi}{3} n; \\
 a_0 &= \frac{2U_m T}{T \cdot 3} = \frac{2}{3} U_m.
 \end{aligned}$$

Найденные по этой формуле значения A_n могут получиться отрицательными. Для расчета амплитудного спектра следует брать абсолютные значения A_n .

Графически спектр изображается в системе координат X, Y, где по оси X откладываются номера гармоник n (или их частоты $n\omega$), а по оси Y — соответствующие им амплитуды A_n (рис. 1, б).

Фазовый спектр определяется аналогично амплитудному. В соответствии с формулой (6) имеем

$$\varphi_n = \arctg \frac{a_n}{b_n} = \arctg \frac{\sin n\omega t_u}{1 - \cos n\omega t_u} = \arctg \left(\operatorname{ctg} \frac{n\omega t_u}{2} \right) = \frac{\pi}{2} - \frac{n\omega t_u}{2}$$

Подставив значения t_u и ω , получим

$$\varphi_n = \frac{\pi}{2} - \frac{n\omega t_u}{2} = \frac{\pi}{2} - \frac{n\pi}{3} = \frac{\pi}{6} (3 - 2n).$$

Поскольку φ_n является аргументом функции тангенса, имеющей период π , то к φ_n можно прибавить или от φ_n отнять любое целое число π . Поскольку в данном случае φ_n возрастает в области отрицательных значений с увеличением n , то удобнее прибавлять целое число π . Таким образом, окончательно можно записать:

$$\varphi_n = \frac{\pi}{6}(3 - 2n) + k\pi; \quad k = 0, 1, 2, 3, \dots$$

Графически фазовый спектр изображен на рис. 1, в, причем значения φ_n для n кратных трем показаны пунктиром, поскольку $A_n = 0$ для этих значений n . Это можно истолковать так: гармоники, номера которых кратны трем, имеют начальную фазу $-\frac{\pi}{2}$ (или $+\pi/2$) и амплитуду, равную нулю.

Расчет может быть значительно сокращен и упрощен, если использовать свойства функции $f(t)$. Известно, что если $f(t)$ — четная, т.е. $f(t) = f(-t)$, то ее разложение в ряд Фурье не содержит членов с синусами, а если $f(t)$ — нечетная, т.е. $f(t) = -f(-t)$, то ее разложение не содержит постоянной составляющей $\frac{a_0}{2}$ и членов с косинусами. Таким образом, ряд Фурье запишется для четной $f(t)$

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\omega t,$$

а для нечетной $f(t)$

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin n\omega t.$$

Кроме того, выражения для a_n и b_n в этом случае также упрощаются. Для четной $f(t)$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cos n\omega t dt = \frac{4}{T} \int_0^{T/2} f(t) \cos n\omega t dt$$

$$b_n = 0, \quad A_n = a_n$$

а для нечетной

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \sin n\omega t dt = \frac{4}{T} \int_0^{T/2} f(t) \sin n\omega t dt$$

$$a_n = 0 \quad b_n = A_n$$

Таким образом, для четных $f(t)$ необходимо вычислять только a_0 и a_n , а для нечетных — только b_n .

Пример 2. Требуется найти аналитическое выражение амплитудного спектра сигнала, показанного на рис. 2, а.

Сигнал описывается выражением

$$f(t) = U_m \sin \frac{\pi}{t_u} t$$

и существует в интервале от $-\frac{t_u}{2}$ до $\frac{t_u}{2}$ периода T . Как нетрудно убедиться, $f(t)$ — нечетная функция.

В соответствии с (9) имеем $a_0 = 0$, $a_n = 0$

Далее введем обозначения:

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{t_u}, \quad \omega = \frac{2\pi}{T}$$

Тогда выражение для b_n запишется так:

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \sin n\omega t dt = \frac{4}{T} \int_0^{T/2} (-U_m \sin \omega_0 t) \sin n\omega t dt = \\ &= -\frac{2U_m}{T} \int_0^{t_u/2} [\cos(\omega_0 - n\omega)t - \cos(\omega_0 + n\omega)t] dt = \\ &= -\frac{2U_m}{T} \left[\frac{\sin(\omega_0 - n\omega)t}{\omega_0 - n\omega} - \frac{\sin(\omega_0 + n\omega)t}{\omega_0 + n\omega} \right] \Big|_0^{t_u/2} = \end{aligned}$$

$$= -\frac{2U_m}{T} \left[\frac{\sin(w_0 - nw) \frac{tu}{2}}{w_0 - nw} - \frac{\sin(w_0 + nw) \frac{tu}{2}}{w_0 + nw} \right]$$

Подставив в полученное выражение значения $w = \frac{2\pi}{T}$ и $w_0 = \frac{2\pi}{t_u}$, произведя несложные преобразования, получим расчетную формулу для b_n

$$b_n = -\frac{2U_m \frac{T}{t_u} \sin n\pi \frac{t_u}{T}}{\pi \left(\frac{T}{t_u} \right)^2 - n^2}$$

При $\frac{T}{t_u} = n$, т.е. $nw = w_0$ имеет место неопределенность

вида $\frac{0}{0}$.

В таких случаях значения коэффициентов ряда Фурье находят по формулам (3), (4) путем подстановки в них данной конкретной величины n . В нашем примере в выражение

(4) подставляем $n = \frac{w_0}{w}$:

$$\begin{aligned} b_n &= -\frac{2}{T} \int_{-tu/2}^{tu/2} f(t) \sin nw_0 t dt = -\frac{4U_m}{T} \int_0^{tu/2} \sin w_0 t \sin nwt dt = \\ &= -\frac{2U_m}{T} \int_0^{tu/2} [\cos(w_0 - nw)t - \cos(w_0 + nw)t] dt = \\ &= -\frac{2U_m}{T} \int_0^{tu/2} [\cos(w_0 - w_0)t - \cos(w_0 + w_0)t] dt = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= -\frac{2U_m}{T} \int_0^{t_u/2} [1 - \cos 2\omega_0 t] dt = -\frac{2U_m}{T} \left(t - \frac{\sin 2\omega_0 t}{2\omega_0} \right) \Big|_0^{t_u/2} = \\
 &= -\frac{U_m}{T} \left(t_u - \frac{2 \sin 2 \frac{2\pi}{t_u} \frac{t_u}{2}}{2 \cdot \frac{2\pi}{t_u}} \right) = -\frac{U_m}{T} \left(t_u - \frac{2 \sin 2\pi}{\frac{4\pi}{t_u}} \right) = -\frac{U_m t_u}{T} .
 \end{aligned}$$

Подставив $t_u = \frac{T}{3}$, получаем расчетную формулу

$$b_n = \frac{2U_m}{\pi} \frac{3 \sin \pi \frac{n}{3}}{9 - n^2},$$

а при $n = 3$

$$b_n = \frac{U_m}{3} .$$

Амплитудный спектр изображен на рис. 2, б. Фазовый спектр данного сигнала можно специально не показывать на рисунке, так как гармоники с нулевой амплитудой имеют нулевую начальную фазу. Это следует из факта, что $a_n = 0$ для всех значений n . Для тех же значений n , при которых $b_n = 0$, определять начальную фазу нет необходимости.

При определении спектра частот сигнала ΔF_c (рис. 1, б) следует учесть составляющие спектра от нулевой ($n = 0$) до второй гармоники ($n = 2$), т.е. $\Delta n = 2$

Тогда

$$\Delta F_c = 2 \cdot \frac{1}{T} = \frac{2}{3t_u} .$$

Зная длительность элементарного импульса t_u , можно вычислить ΔF_c .

Задача 2

Используя данные табл. 3, выполнить следующее:

1. Определить необходимое для кодирования M сообщений число разрядов заданного в табл. 3 двоичного кода.
2. Указать закон построения заданного в табл. 3 двоичного помехоустойчивого кода и построить 3, 4 его кодовых комбинаций.
3. Задаться единичным искажением в построенной в п.3 кодовой комбинации и показать, как это искажение будет обнаружено системой передачи информации, если оно произойдет при передаче комбинации.
4. Найти вероятность необнаруженной ошибки в системе.
5. Рассчитать коэффициенты избыточности и обнаружения помехоустойчивого кода.
6. Рассчитать коэффициент эффективности использования канала связи в системе передачи информации или коэффициент потерь.

Расчеты вести при условии, что события, заключающиеся в искажении отдельных символов, передаваемых по каналу связи, являются независимыми, и вероятность искажения одного символа $p = 10^{-3}$.

Указания к решению задачи 2

При выполнении этой задачи студенту необходимо тщательно изучить соответствующие разделы рекомендованной литературы, обратив особое внимание на принципы построения и работы систем передачи информации, на особенности помехоустойчивых кодов, способы расчета их основных характеристик, возможные области применения и т.д.

Системы передачи информации с точки зрения способа повышения достоверности можно классифицировать, как показано на рис. 3.

В системах без обратной связи сигналы передаются только в одном направлении — от отправителя к получателю.

Для их создания достаточен симплексный (односторонний) канал. Если при этом использовать простой, помехоустойчивый код ПК, то повышение достоверности не может быть достигнуто, и достоверность получаемых сообщений будет определяться только качеством и свойствами канала и аппаратуры. Если использовать код, позволяющий обнаруживать определенную долю ошибок, то достоверность, как мера соответствия принятого сообщения переданному, также не будет повышена. Однако о наличии этих ошибок получатель будет проинформирован приемником. Повысить достоверность в системах без обратной связи можно за счет использования кодов, исправляющих ошибки КК, а также путем повторения передачи сообщения несколько раз ППС. В последнем случае возможны несколько вариантов (с использованием простого кода, кода с обнаружением ошибок и кода с исправлением ошибок).

В системах с обратной связью предполагается передача определенной информации также и от получателя к отправителю, для чего между ними необходим дуплексный (двухсторонний) канал. В системах с информационной обратной связью от получателя к отправителю (по обратному каналу) чаще всего передается все принятое сообщение. На приемном конце переданное и принятое сообщения сравниваются, и при их несовпадении передача повторяется.

Ошибки, возникающие в этой системе, можно разделить на обнаруживаемые и необнаруживаемые. Последние имеют место в том случае, когда некоторая кодовая комбинация, допустим буквы А, принимается ошибочно, как комбинация буквы Б, а при обратной передаче комбинация буквы Б снова искажается в комбинацию буквы А. Ошибки такого вида иногда называют зеркальными. Эти ошибки практически являются единственными, не обнаруживаемыми ошибками. В случаях появления обнаруживаемой ошибки по прямому каналу посылается знак стирания, сообщающий, что последний знак (или группа знаков) принят неверно и будет передан вновь. Легко заметить, что возможен

такой случай, когда в прямом канале передача прошла без искажений, а кодовая комбинация исказилась в обратном канале. Тогда будет иметь место лишнее, ненужное повторение передачи. Это обстоятельство является одним из недостатков систем с информационной связью.

На рис. 4 приведена структурная схема системы передачи данных с решающей обратной связью РОС. В целях упрощения схемы на рисунке не показаны модуляторы, преобразователи и т.д. При передаче информации по прямому каналу блок информации поступает от источника информации к кодеру, информация кодируется помехоустойчивым ошибкообнаруживающим кодом (к нему добавляется некоторое количество избыточных символов).

Одновременно блок информации записывается в накопитель. На приемной стороне принятые сигналы декодируются, информационная часть принятой кодовой комбинации помехоустойчивого кода записывается в накопитель. В случае приема комбинации с обнаруженной ошибкой записанная в накопителе информация стирается, а в пункт передачи по обратному каналу сигнал запроса, в соответствии с которым по прямому каналу повторяется передача кодовой комбинации, принятой неправильно. При этом сигналы на вход кодера поступают из накопителя, что обеспечивается переключающим устройством по команде приемника сигнала решения.

Если сообщение принято правильно или же произошла ошибка, которую применяемый код не обнаруживает, то в пункт передачи посылается сигнал об отсутствии ошибок (подтверждения правильности приема), и с передающего пункта передается очередная кодовая комбинация.

Различаются системы с РОС с ожиданием сигнала решения и без ожидания. В системах с ожиданием решающего сигнала передача новой кодовой комбинации или повторение ранее переданной осуществляется только после приема передающей стороной сигнала решения — подтверждения правильности приема или запроса на повторение передачи

последней кодовой комбинации. Алгоритм работы системы с ожиданием представлен на рис.5.

В системах с РОС в принципе возможно появление так называемых “двойников” и пропадание блоков информации. Первое имеет место, если кодовая комбинация принята правильно, но сигнал подтверждения при передаче по обратному каналу исказился в сигнал запроса. В этом случае приемник не сотрет принятый блок информации и выдаст его потребителю, а передатчик осуществит повторную передачу данного блока, поскольку он принял сигнал запроса.

В том же случае, если в обратном канале сигнал запроса исказится в сигнал подтверждения, блок информации не будет выдан получателю вовсе.

Рассматривать два последних случая как появление ошибки неверно, так как в одном из них появился просто лишний блок информации, не содержащий ошибок, а в другом блок исчез, но вместо него появился другой блок с ошибкой. Очевидно, вероятность приема информации с ошибкой, вероятность появления “двойника” и вероятность пропадания блока следует рассматривать как самостоятельные параметры системы передачи данных с РОС.

Возможность появления двойников и пропадания блоков информации является существенным недостатком систем с РОС. Хотя вероятность этих событий обычно очень мала, тем не менее она теоретически не может быть сведена к нулю. В качестве практических мер борьбы с этими нежелательными явлениями можно указать на использование максимально отличающихся друг от друга сигналов запроса и подтверждения и циклических номеров блоков. Последнее заключается в том, что каждая кодовая комбинация дополняется присваиваемым ей номером.

Повышение достоверности в системах передачи информации основано на использовании помехоустойчивых кодов. К настоящему времени известно большое количество кодов. Основными параметрами этих кодов с точки зрения их практического использования являются коэффициент обнаружения ошибок и коэффициент избыточности.

Коэффициент обнаружения ошибок $K_{обн}$ показывает, какая часть от всех возможных ошибок обнаруживается данным кодом

$$K_{обн} = \frac{A}{A+B},$$

где A — общее количество искаженных комбинаций с обнаруживаемыми кодом ошибками;

B — общее количество искаженных комбинаций, ошибки в которых данным кодом не обнаруживаются.

При передаче достаточно большого числа комбинаций Q можно считать, что количество комбинаций, ошибки в которых обнаруживаются A , и общее количество искаженных комбинаций $(A + B)$ соответственно равны

$$A = Q P_{00}; \quad A + B = Q P_k,$$

где P_{00} — вероятность обнаруживаемой ошибки;

P_k — вероятность искажения комбинации кода.

С учетом записанных равенств выражение для $K_{обн}$ может иметь следующий вид:

$$K_{обн} = \frac{A}{A+B} = \frac{QP_{00}}{QP_k} = \frac{P_{00}}{P_k}. \quad (8)$$

Иногда удобнее вести расчет, используя вероятность необнаруженной ошибки $P_{но}$. Зная, что

$$P_{пп} + P_{но} + P_{00} = 1,$$

где $P_{пп}$ — вероятность правильного приема комбинации,

и что $1 - P_{пп} = P_k$, формулу для $K_{обн}$ можно записать в таком виде:

$$K_{обн} = \frac{P_{00}}{P_k} = \frac{1 - P_{пп} - P_{но}}{P_k} = 1 - \frac{P_{но}}{P_k}. \quad (9)$$

Коэффициент избыточности характеризует степень использования комбинаций кода для кодирования сообщений и определяется по формуле

$$K_{\text{изб}} = 1 - \frac{\log M}{\log N} \quad (10)$$

где M — число разрешенных (используемых для кодирования сообщений) комбинаций;

N — общее число комбинаций в коде с данной разрядностью.

Для делимых кодов эта формула упрощается

$$K_{\text{изб}} = 1 - \frac{\log M}{\log N} = 1 - \frac{\log_2 2^k}{\log_2 2^n} = 1 - \frac{k}{n} = \frac{r}{n},$$

где r — количество проверочных символов.

Количество разрешенных комбинаций здесь равно 2^k , а общее их число в коде 2^n . Логарифм взят при основании два, поскольку в задании указаны только двоичные коды.

По приведенным формулам могут быть рассчитаны $K_{\text{изб}}$ и $K_{\text{обн}}$ любого указанного в табл. 3 кода. Что же касается методики построения кодовой комбинации, расчета вероятности обнаруживаемой ошибки и пр., то они могут быть указаны только для конкретного кода. Ниже рассматриваются некоторые помехоустойчивые коды.

Код с проверкой на четность (нечетность) образуется путем добавления к комбинации из k символов одного избыточного символа так, чтобы количество единиц (или нулей) в новом коде, состоящим из $n=k+1$ элементов, было четным (или нечетным).

Такой код состоит из 2^k комбинаций, имеет минимальное кодовое расстояние $d = 2$ и позволяет обнаружить нечетное число неверно принятых символов (все нечетные ошибки), так как при этом количество единиц (нулей) в комбинации получается нечетным. Ошибки четной кратности (двойные, четверные и т.д.) данным кодом не обнаруживаются.

Коэффициент избыточности кода с проверкой на четность

$$K_{\text{изб}} = 1 - \frac{k}{n} = \frac{1}{n},$$

а коэффициент обнаружения

$$K_{\text{ОБН}} = \frac{P_{00}}{P_K} = \frac{P_1 + P_3 + P_5 + P_7 + \dots}{P_K},$$

где P_1, P_3, P_5, P_7 — соответственно вероятности одиночной, тройной, пятерной, семерной ошибок в кодовой комбинации;

P_K — вероятность ошибки (любой) в комбинации.

Вероятность l — кратной ошибки в n — элементной кодовой комбинации определяется формулой

$$P_l = C_n^l P^l (1 - P)^{n-l} = C_n^l P^l q^{n-l},$$

где C_n^l — число сочетаний из n по l ;

P — вероятность неверного приема символа;

$q = 1 - P$ — вероятность правильного приема символа.

Таким образом, для кода с проверкой на четность вероятность обнаруживаемых ошибок определится выражением

$$P_{00} = C_n^1 P \cdot q^{n-1} + C_n^3 P^3 q^{n-3} + C_n^5 P^5 q^{n-5} + \dots$$

а вероятность правильного приема кодовой комбинации

$$P_{\text{пн}} = q^n.$$

Пренебрегая весьма малыми вероятностями всех ошибок, начиная с тройной, формулу для $K_{\text{обн}}$ можно записать в виде

$$K_{\text{ОБН}} \approx \frac{C_n^1 P q^{n-1}}{1 - q^n}.$$

Код с постоянным весом (называемый также кодом на одно сочетание; кодом типа C_n^m ; кодом с постоянным соотношением единиц и нулей) характеризуется тем, что для передачи используются только те комбинации n -элементного кода, которые содержат m единиц (или нулей). Общее число комбинаций (разрешенных) в коде с постоянным весом определяется числом сочетаний из n по m

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}.$$

Наиболее распространенным кодом такого типа является код 3 : 2. Число комбинаций в нем $C_5^3 = 10$. Коэффициент избыточности данного кода определяется по формуле

$$K_{изб} = 1 - \frac{\log_2 C_n^m}{n}$$

Код с постоянным весом обнаруживает все нечетные ошибки, так как при этом нарушается соотношение единиц и нулей, и часть четных. Из четных не обнаруживаются только такие, при которых искажается равное количество единиц и нулей (ошибки смещения) и, таким образом, требуемое соотношение сохраняется.

Коэффициент обнаружения рассматриваемого кода можно записать в таком виде:

$$K_{обн} = 1 - \frac{P_{00}}{P_K} = 1 - \frac{m(n-m)P_2 + C_m^2 C_{n-m}^2 P_4 + C_m^3 C_{n-m}^3 P_6 + \dots}{1 - q^n}$$

где P_2, P_4, P_6 — вероятности двойной, четверной, шестерной ошибок в кодовой комбинации.

Корреляционный код (код с удвоением числа символов) характеризуется тем, что повышение эффективности кода достигается не только введением избыточности, но и использованием определенных зависимостей между символами кодовых комбинаций. Он образуется следующим образом. Каждый символ исходного кода преобразуется в два, при этом единица преобразуется в 10, а ноль в 01. Так, например, комбинация 1001 исходного кода в корреляционном коде запишется как 10010110. Корреляционный код будет всегда иметь вдвое больше символов, чем исходный. Поэтому его коэффициент избыточности всегда равен 0,5.

Корреляционный код обладает сравнительно высокой помехоустойчивостью, поскольку ошибка не будет обнаружена только в том случае, если искажены два рядом стоящие символа, соответствующие одному символу исходного кода, т.е. 0 перейдет в 1, а 1 — в 0. Вероятность такого события равна $P^2(1 - P)^{n-2}$. Учитывая возможность искаже-

ния всех пар импульсов в различных сочетаниях, формулу для расчета можно записать так:

$$P_{HO} = kp^2q^{n-2} + C_k^2 p^4 q^{n-4} + C_k^3 p^6 q^{n-6} + \dots \approx kp^2 q^{n-2},$$

а соответственно формулу для $K_{OБН}$

$$K_{OБН} = 1 - \frac{P_{HO}}{P_K} \approx 1 - \frac{kp^2 q^{n-2}}{1 - q^n}.$$

Код с повторением и инверсией (инверсный код) характеризуется тем, что кодовая комбинация передается дважды и в зависимости от того, четное или нечетное число единиц в ней содержится, она либо просто повторяется, либо повторяется в инвертированном виде. Таким образом, комбинация 1001 в инверсном коде будет передана как 10011001, а комбинация 1011- как 1010100.

Комбинация кода состоит из 2 К элементов и, следовательно, как и у корреляционного кода всегда $K_{ИЗБ} = 0,5$.

При приеме кодовой комбинации производят две операции. Сначала суммируют единицы, содержащиеся в первых k символах. Если их количество окажется четным, то вторая группа из k символов принимается без инверсии, а если нечетным — то с инверсией. После этого обе зарегистрированные комбинации поэлементно сравнивают и при обнаружении хотя бы одного несовпадения комбинацию бракуют.

Ошибка в данном коде не будет обнаружена только в том случае, если одновременно исказятся два символа в исходной комбинации и соответствующие им два символа в повторяемой комбинации. Вероятность такого искажения приближенно может быть определена по следующей формуле:

$$P_{HO} \approx C_k^2 p^2 q^{k-2} p^2 q^{k-2} = C_k^2 p^4 q^{2k-4}, \quad (11)$$

а коэффициент обнаружения

$$K_{OБН} = 1 - \frac{P_{HO}}{P_K} = 1 - \frac{C_k^2 p^4 q^{2k-4}}{1 - q^n}.$$

Код Хемминга относится к группе систематических кодов, для которых существуют общие методы кодирования и декодирования. Однако для данного кода есть более простой способ построения кодовой комбинации и обнаружения ошибок, который излагается ниже.

Код Хемминга строится таким образом, чтобы в результате проверок k информационных и r проверочных разрядов кодовой комбинации получалось двоичное число, указывающее номер искаженного разряда, например, число 1001 указывает, что искажен 9-й разряд. Так как число символов в коде $n = k + r$, то общее число разрядов двоичного числа, указывающего на номер искаженной комбинации, должно отвечать неравенству $2^r \geq r + k + 1$.

Единица в правой части учитывает случай отсутствия искажения. Это неравенство является расчетным для определения числа проверочных символов при заданном k .

Для того, чтобы r разрядное число указывало номер искаженного элемента, проверки (образование проверочных символов) необходимо строить по определенному правилу. Это правило может быть установлено из следующих соображений. Если в результате проверок получится число с единицей в первом (младшем) разряде, то это должно означать, что искажение произошло в нечетном разряде кодовой комбинации, так как любое двоичное число с единицей в младшем разряде будет нечетным. Если единица будет во втором разряде, то искажение произошло в одном из тех разрядов, номера которых в двоичной записи имеют единицу во втором разряде, т.е. 2-, 3-, 6-, 7-, 10-, 11-й и т.д. Таким образом, проверки должны строиться по следующему правилу:

$$\begin{aligned} b_1 &= n_1 \oplus n_3 \oplus n_5 \oplus n_7 \oplus n_9 \oplus \dots \\ b_2 &= n_2 \oplus n_3 \oplus n_6 \oplus n_7 \oplus n_{10} \oplus \dots \\ b_3 &= n_4 \oplus n_5 \oplus n_6 \oplus n_7 \oplus n_{12} \oplus \dots \\ b_4 &= n_8 \oplus n_9 \oplus n_{10} \oplus n_{11} \oplus n_{12} \oplus \dots, \end{aligned}$$

где b_1, b_2, b_3, b_4 — номера проверок;

n_1, n_2, n_3 — номера разрядов кодовой комбинации;

\oplus — знак сложения по модулю два.

В качестве проверочных разрядов комбинации должны быть выбраны такие, которые участвуют только в одной проверке (в противном случае возможна ситуация, когда по одной проверке необходимо записать в проверочный разряд 1, а по второй — 0). Такими разрядами являются 1-й, 2-й, 4-й, 8-й и т.д. Формированием проверочных символов заканчивается построение кодовой комбинации.

Для построения алгоритма построения кодовых комбинаций рассмотрим пример. Пусть требуется закодировать в коде Хемминга исходную комбинацию 11011 из 5 информационных элементов. Из приведенного выше соотношения определяем, что общая длина комбинации $n \geq 9$, так как

$$2^5 < \frac{2^9}{9+1} \text{ или } 32 < 51,2 \text{ (при } n = 8 \text{ требуемое неравенство}$$

еще не выполняется $32 > \frac{256}{8+1}$ или $32 > 28,4$). Следовательно,

число проверочных разрядов должно быть $9 - 5 = 4$. Проверочные элементы располагаются в 1-м, 2-м, 4-м и 8-м разрядах, а информационные в 3-м, 5-м, 6-м, 7-м и 9-м. Проверочные символы определяем в соответствии с правилом проверок так, чтобы каждая проверка давала нуль. В результате получаем

$$\begin{aligned} n_1 &= n_3 \oplus n_5 \oplus n_7 \oplus n_9 = 1 \oplus 1 \oplus 1 \oplus 1 = 0 \\ n_2 &= n_3 \oplus n_6 \oplus n_7 = 1 \oplus 0 \oplus 1 = 0 \\ n_4 &= n_5 \oplus n_6 \oplus n_7 = 1 \oplus 0 \oplus 1 = 0 \\ n_8 &= n_9 = 1 = 1 \end{aligned}$$

Таким образом, получаем комбинацию

0	0	1	0	1	0	1	1	1
1	2	3	4	5	6	7	8	9

номера разрядов

Пусть в процессе передачи исказился 5-й разряд. При декодировании проверки дадут результат $b_1 = 1, b_2 = 0, b_3 = 1, b_4 = 0$, а в двоичной записи 0101, что означает десятичное число 5, т.е. искажен 5-й разряд.

Коэффициент избыточности кода Хемминга, как и всех равномерных кодов, определяется по формуле

$$K_{изб} = 1 - \frac{k}{n}.$$

Коэффициент обнаружения ошибок, когда код используется для исправления, определяется по формуле

$$K_{обн} = \frac{P_{00}}{P_K} = \frac{P_1}{1 - q^n} = \frac{C_n^1 p(1-p)^{n-1}}{1 - q^n}.$$

Если же код использовать только для обнаружения ошибок, то он позволит обнаруживать все одиночные и двойные ошибки, а также часть ошибок более высокой кратности, так как его минимальное кодовое расстояние $d = 3$. Коэффициент обнаружения в этом случае

$$K_{обн} > \frac{P_1 + P_2}{P_K} = \frac{C_n^1 p q^{n-1} + C_n^2 p^2 q^{n-2}}{1 - q^n}.$$

Итеративный (матричный) код получает в последнее время широкое распространение. Он строится (рис. 6) путем комбинации двух или более кодов, когда символы строки кодируются одним кодом, а символы столбца — другим (или тем же кодом).

Наибольшее распространение получил код с проверкой на четность “по горизонтали” и “по вертикали”, т.е. с проверкой на четность строк и столбцов блока символов, образующих одну кодовую комбинацию итеративного кода (см. рис. 6).

Минимальное кодовое расстояние такого кода равно произведению минимальных кодовых расстояний используемых кодов. В частности для кода с проверкой на четность “по горизонтали” и “по вертикали” минимальное кодовое расстояние равно 4, так как это расстояние для кода с проверкой на четность равно двум.

Расчет $K_{изб}$ итеративного кода не представляет трудностей. Определение $K_{обн}$ более сложно. В работе допускается

упрощенный расчет $K_{\text{Обн}}$ итеративного кода, исходя из того, что необнаруженными будут только такие ошибки, которые составляют прямоугольник.

Вероятность совместного появления такой ошибки — двухкратной в двух кодовых комбинациях равна

$$\left[P^2 (1-P)^4 \right]^2 \left[(1-P)^6 \right]^{i-1},$$

где i — количество информационных комбинаций.

Двойные ошибки в двух комбинациях могут появиться в различных сочетаниях. Вероятность совместного появления любой одинаковой двойной ошибки в двух комбинациях равна

$$C_6^2 \left[P^2 (1-P)^4 \right]^2 \left[(1-P)^6 \right]^{i-1}.$$

Вероятность появления любой одинаковой двойной ошибки в любых двух комбинациях группы из $i+1$ комбинаций (составляющих прямоугольник) равна (для примера рис. 6)

$$P_{HO} = C_{i+1}^2 C_6^2 P^4 (1-P)^8 (1-P)^{6(i-1)}.$$

Избыточность при этом равна $K_{\text{изб}} = \frac{1}{i+1} + \frac{1}{6}$.

Как известно, комбинации разделимых помехоустойчивых кодов состоят из k информационных и r проверочных символов. Это обстоятельство существенно облегчает определение разрядности кода, предназначенного для передачи M сообщений. Очевидно, что $K = \lceil \log_2 M \rceil$, где знак $\lceil \cdot \rceil$ означает ближайшее большее число.

В случае итеративного кода под k следует понимать информационные символы всех строк (кроме последней, проверочной). Количество строк следует выбирать таким образом, чтобы в строке было не более 7-8 информационных символов.

Несколько иначе определяется разрядность кода с постоянным весом. Здесь необходимо, задавшись m , подобрать такое n , чтобы C_n^m было больше M , а C_{n-1}^m было меньше M .

Весьма важной характеристикой системы передачи информации является ее пропускная способность. Практически этот показатель полностью определяется коэффициентом эффективности использования канала связи, который и требуется рассчитать в контрольной работе. Этот коэффициент

$$K_{\text{эф}} = (1 - K_{\text{изб}})(1 - P_{00}).$$

Для систем с информационной обратной связью используются обычные двоичные коды. В этом случае коэффициент избыточности $K_{\text{изб}}$ и вероятность обнаружения ошибок P_{00} в системе рассчитать довольно сложно. Поэтому для систем ИОС в работе необходимо рассчитать коэффициент потерь от переспросов

$$K_{\text{пот}} = \frac{N_{\text{пер}} - N_{\text{пот}}}{N_{\text{пер}}},$$

где $N_{\text{пер}}$ — общее число переданных комбинаций;
 $N_{\text{пот}}$ — число потерянных комбинаций.

При независимых ошибках в канале и вероятности искажения символа P вероятность искажения кодовой комбинации

$$P_K = 1 - (1 - p)^n \approx np.$$

Переспрос в системе возникает при появлении ошибки как в прямом, так и в обратном канале. Поэтому вероятность возникновения переспроса

$$P_{\text{пер}} = 2P_K \approx 2np.$$

При передаче по каналу $N_{\text{пер}}$ комбинаций число переспросов составляет

$$W = N_{\text{пер}} P_{\text{пер}} = 2np N_{\text{пер}}.$$

При каждом переспросе бесполезно передается $B + 1$ комбинаций, где B — число комбинаций в буферном регистре (длина блока, обычно не превышающая 30 комбинаций) и

одна комбинация переспроса. Следовательно, всего бесполезно передается

$$N_{\text{ПОТ}} = W(B+1) = 2npN_{\text{ПЕР}}(B+1),$$

тогда $K_{\text{ПОТ}} = 1 - 2np(B+1)$.

Задача 3

Построение кодирующих и декодирующих устройств циклических кодов.

Исходные данные для этой задачи заданы в табл. 4.

Циклическими кодами называются такие систематические коды, у которых при циклической перестановке символов получается также разрешенная комбинация. Этот код может как обнаруживать, так и исправлять ошибки, однако в большинстве случаев он используется как ошибкообнаруживающий. Циклический код задается производящим полиномом, называемым также образующим, генерирующим и т.п., определяющим количество избыточных символов в комбинации и закон их образования, т.е. определяющим в конечном счете свойства кода по обнаружению и исправлению ошибок.

Двоичные комбинации формально можно записать многочленом фиктивной переменной x . Над данными многочленами можно производить все операции согласно законам алгебры, за исключением вычитания и сложения, которые производятся по модулю два. Отличительной особенностью циклического кода является то, что все его комбинации без остатка делятся на производящий многочлен.

Введем обозначения:

$G(x)$ — многочлен исходного сообщения степени $k-1$ (кодовой комбинации без избыточного кода);

$P(x)$ — образующий многочлен степени g ;

$F(x)$ — многочлен закодированного сообщения (кодовый многочлен) степени, меньшей $n = g + k$.

В этом случае кодовый многочлен может быть образован путем умножения многочлена сообщения $G(x)$ на $P(x)$. Однако при таком методе не обеспечивается четкое разделение информационных и избыточных символов. При использовании рассматриваемого ниже метода коэффициенты при членах высших порядков будут соответствовать информа-

ционными элементами, а коэффициенты при членах низших порядков — проверочным.

Умножим $G(x)$ на x^r и полученное выражение поделим на $P(x)$. В результате деления получится частное $Q(x)$ и остаток $R(x)$ степени, меньшей g , или

$$x^r G(x) = Q(x)P(x) + R(x).$$

Так как сложение и вычитание по “модулю два” выполняется одинаково, то

$$x^r G(x) + R(x) = Q(x)P(x).$$

Левая часть полученного выражения, будучи кратной величине $P(x)$, является кодовым многочленом $F(x)$

$$F(x) = x^r G(x) + R(x).$$

Рассмотрим это выражение. Его первое слагаемое имеет нулевые коэффициенты в членах низшего порядка, а степень второго — меньше g . Следовательно, коэффициенты g членов низшего порядка многочлена $F(x)$ являются такими же, что и коэффициенты остатка $R(x)$, а k коэффициентов наивысшего порядка те же, что и многочлена $G(x)$. Таким образом, коэффициенты остатка $R(x)$ соответствуют проверочным элементам, а коэффициенты членов степени g и выше — информационным элементам. Рассмотрим этот процесс кодирования на примере.

Пусть $k = 12$, а $P(x) = 1 + x^2 + x^4 + x^5$. Определим значение проверочных элементов, если кодируемое сообщение имеет вид 100110100010 или в алгебраической записи $G(x) = 1 + x^3 + x^4 + x^6 + x^{10}$. В результате умножения $G(x)$ на x^r получим

$$G(x)x^2 = x^5(1 + x^3 + x^4 + x^6 + x^{10}) = x^5 + x^8 + x^9 + x^{11} + x^{15}.$$

Путем деления $G(x)x^r$ на $P(x)$ найдем частное и остаток:
 $x^5 + x^8 + x^9 + x^{11} + x^{15} = (1 + x^2 + x^4 + x^5)(1 + x^8 + x^9 + x^{10}) + (1 + x^2 + x^4).$

Кодовый многочлен образуется при сложении остатка с $x^5 G(x)$

$$F(x) = 1 + x^2 + x^4 + x^5 + x^8 + x^9 + x^{11} + x^{15}.$$

Отсюда закодированная комбинация будет иметь вид

10101

100110100010

проверочные элементы

информационные элементы

Учитывая, что все разрешенные комбинации циклического кода без остатка делятся на $P(x)$, на приеме обнаружение ошибок можно производить, используя это свойство. Искажение комбинации можно представить как результат сложения неискаженной комбинации и комбинации ошибки, которая также может быть записана полиномом. Нетрудно видеть, что многочлен ошибки $A(x)$ без остатка делится на $P(x)$. Это возможно только в том случае, если $A(x)$ имеет степень выше степени $P(x)$. Следовательно, любой циклический код надежно обнаруживает пакеты (группы) ошибок длиной, равной или меньше степени $P(x)$, т.е. длиной, равной или меньше числа проверочных символов.

Обнаружение и исправление ошибок в циклическом коде может быть произведено также и с использованием проверочной матрицы, которая получается на основе полинома делением двучлена $1 + x^n$ на производящий полином $P(x)$

$$h(x) = \frac{1 + x^n}{P(x)} = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \dots + b_kx^k.$$

В основу работы устройств кодирования и декодирования циклических кодов могут быть положены проверки по модулю два, соответствующие проверочному полиному $h(x)$, либо логические операции, соответствующие делению кодируемой последовательности на производящий полином.

Коэффициент избыточности циклического кода, как и кода Хемминга, определяется формулой

$$K_{изб} = 1 - \frac{k}{n}.$$

Определение коэффициента обнаружения для циклического кода представляется затруднительным, поскольку в

общем виде трудно определить, сколько и какие ошибки обнаруживает код. Приближенное выражение для $K_{\text{обн}}$ можно записать, исходя из следующих соображений.

Для каждой комбинации n элементного кода возможно $2^n - 1$ комбинаций ошибок, из них необнаруживаемых $2^k - 1$, а обнаруживаемых (по числу запрещенных комбинаций) $2^n - 2^k = 2^k (2^r - 1)$.

Таким образом,

$$K_{\text{обн}} = \frac{P_{00}}{P_k} = \frac{2^k (2^r - 1)}{2^n - 1}$$

Устройства кодирования и декодирования циклических кодов строят с использованием проверочного полинома или по принципу деления информационной последовательности на производящий полином.

Кодирующее устройство с использованием проверочного полинома. Регистр сдвига имеет k разрядов. Выходы ячеек регистра, участвующие в проверках, поданы на входы сумматора по модулю "2". На сумматор подаются единицы полинома $h(x)$ (рис. 7).

Информационная последовательность в течение k тактов поступает в регистр сдвига. При этом ключ K_2 открыт, а K_1 — закрыт. После k тактов ключ K_2 закрывается, а K_1 открывается и регистр совершает r тактов, когда формируются проверочные разряды. Далее K_1 закрывается и на выход поступают остальные информационные разряды.

Рассмотрим этот процесс на примере кода (7,4), $P(x) = x^3 + x^2 + 1$,

$$h(x) = \frac{x^7 + 1}{x^3 + x^2 + 1} = x^4 + x^3 + x^2 + 1 \rightarrow 11101$$

Кодирующее устройство показано на рис.8, где $a_1 \dots a_4$ — ячейки регистра, куда записывается информация. Возьмем, к примеру, информационную последовательность 0101. При открытом ключе K_2 она записывается в ячейки $a_1 \dots a_4$ (нулевой такт),

ключ K_2 закрывается, K_1 — открывается. На 1-ом такте формирования первого проверочного разряда суммируются в соответствии со схемой ячейки $a_1 \oplus a_3 \oplus a_4 = 1 \oplus 1 \oplus 0 = 0$.

Этот результат “0” записывается в ячейку a_4 и происходит сдвиг. Первый информационный элемент (“1”) поступает в канал. Теперь снова производится суммирование содержимого ячеек $a_1 \oplus a_3 \oplus a_4 = 0 \oplus 0 \oplus 0 = 0$ в конце первого такта. В конце второго суммируются $a_1 \oplus a_3 \oplus a_4 = 1 \oplus 0 \oplus 0 = 1$ и на третьем такте этот результат суммирования записывается в ячейку a_4 . Сформированная последовательность $1000101 \rightarrow 1 + x^4 + x^6$ поступает в канал. Можно легко доказать, что $x^3 + x^2 + 1$ без остатка делится на производящий полином.

Кодирующее устройство с делением на производящий полином. Недостаток предыдущей схемы — кодирующее устройство должно иметь регистр сдвига на k разрядов, что при большом k имеет определенные неудобства. При использовании деления на производящий полином регистр сдвига имеет всего $r = n - k$ разрядов. Схема такого устройства показана на рис. 9. Регистр сдвига имеет сумматоры по модулю “2”, включенные между ячейками тех разрядов, которым соответствуют “единицы” производящего полинома. Число сумматоров должно быть на один меньше числа ненулевых членов (единиц) производящего полинома.

Вначале ключ K_1 закрыт, а ключи K_2 и K_3 открыты. Информационная последовательность поступает в канал и на входной сумматор. В процессе прохождения информационной последовательности в схеме регистра накапливается r проверочных разрядов, являющихся остатком от деления информационной последовательности на производящий полином.

После k тактов ключ K_1 открывается, а K_2 и K_3 закрываются и r проверочных элементов поступают из регистра сдвига вслед за информационными.

Рассмотрим формирование кодовой комбинации (7, 4), $P(x) = x^3 + x^2 + 1$. Для построения кодирующего устройства запишем $P(x) = 1 + x^2 + x^3 \rightarrow 1011$. Так как $P(x)$ имеет

3 единицы, то в схеме должно быть $3 - 1 = 2$ сумматора. Схема кодирующего устройства показана на рис.10. Точка a — вход информационной последовательности. Точка b — результат суммирования содержимого точки a и того, что было в 1-ой ячейке регистра. Это записывается в виде алгоритма, как

$$b = a \oplus 1$$

Содержимое ячейки 3 переходит в ячейку 2, поэтому $2 = 3$.

В целом алгоритм работы кодирующего устройства будет записан следующим образом:

a = информация

$$b = a \oplus 1$$

$$1 = b \oplus 2$$

$$2 = 3$$

$$3 = b$$

Возьмем информационную последовательность $x^6 + x^4 \rightarrow 1010$ и в соответствии с алгоритмом составим таблицу:

Таблица

№ тактов	Точки		Ячейки		
	a	b	3	2	1
0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	0	1
2	0	1	1	1	1
3	1	0	0	1	1
4	0	1	1	0	0

Таким образом, закодированная комбинация будет иметь вид $x^6 + x^4 + 1 \rightarrow 1010001$.

Рассмотрим для примера схему кодирования с делением на производящий полином, рекомендованный МККТТ

$$P(x) = x^{16} + x^{12} + x^5 + 1$$

Перепишем этот полином в виде

$$P(x) = 1 + x^5 + x^{12} + x^{16} \rightarrow 10000100000010001$$

Схема этого кодирующего устройства показана на рис. 11. Так как количество единиц в производящем полиноме равно 4, то число сумматоров равно $4 - 1 = 3$. Количество ячеек регистра сдвига равно $r = 16$.

Декодирующие устройства циклических кодов строят по схемам, подобным кодирующим устройствам. На рис. 12 показана схема декодирующего устройства с делением на производящий полином. Принимаемая с канала информация из $n = k + r$ разрядов поступает в буферный регистр через ключ k и на устройство деления, построенное таким же образом как и кодирующее устройство. После n тактов ключ k закрывается и с r разрядов регистра снимается информация в обнаружитель ошибки. Если ошибок нет (во всех r разрядах одни нули), то из буферного регистра информация из первых k разрядов поступает на выход, а в остальных r разрядах проверочные разряды стираются.

Задача 4

Для выполнения задачи необходимо рассчитать полосу спектра сигнала ΔF_c (по данным задачи 1), учитывая, что длительность элементарного импульса t_u равна двум последним цифрам шифра в мс. Например, для шифра ВАТС — $103 t_u = 3$ мс. Если шифр заканчивается двумя нулями, берется третья цифра (от конца) и 0.

При модуляции с учетом передачи несущей и двух боковых, полоса частот увеличивается. Примерно можно считать*

$$\Delta F_K \approx 2 \Delta F_C.$$

Определяем максимальную и практическую скорости модуляции

$$B_{MAX} = \Delta F_K, \text{ Бод};$$

$$B_{ПРАК} = 0,7 \Delta F_K, \text{ Бод}.$$

Девидация частоты (максимальное отклонение частоты от среднего значения при частотной модуляции)

$$\Delta f = \frac{\Delta F_K}{2,8}.$$

$$\text{Индекс частотной модуляции } m_1 = \frac{2 \Delta f}{B_{\text{прак}}}.$$

Теоретическая пропускная способность канала согласно формуле Шеннона (бит/с)

$$C_{\text{ТЕОР}} = \Delta F_K \log_2 \left(1 + \frac{P_C}{P_{\Pi}} \right),$$

где $\frac{P_C}{P_{\Pi}}$ — отношение мощности сигнала к мощности помехи.

*Для вариантов 7–10, в табл. 2, можно считать

$$\Delta F_K = \Delta F_C.$$

В контрольной работе можно принять

$$\frac{P_c}{P_{\Pi}} \approx 10 - 20.$$

Скорость передачи информации можно рассчитать следующим образом. Если известны P_1 (вероятность появления символа 1 в одном из разрядов комбинации) и P_0 (вероятность появления 0), то среднее количество информации, приходящееся на этот разряд,

$$J_{\text{СИМВ}} = -[p_1 \log_2 p_1 + p_0 \log_2 p_0].$$

В контрольной работе можно принять p_1 и p_0 одинаковы для всех разрядов, среднее количество информации, содержащееся в кодовой комбинации из k информационных разрядов, $J_K = k J_{\text{СИМВ}}$. Практическая скорость передачи информации

$$C_{\text{ПРАК}} = \frac{k}{n} J_K V_{\text{ПРАК}}.$$

Для систем с ИОС можно считать

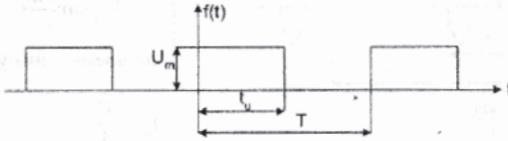
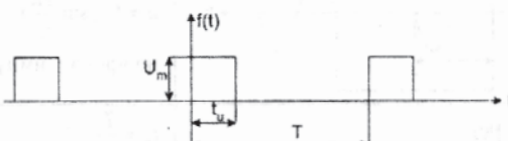
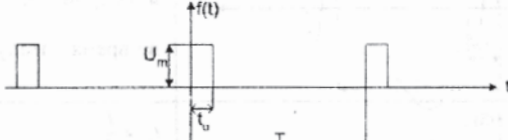
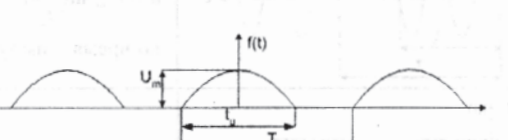
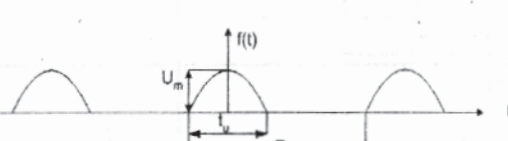
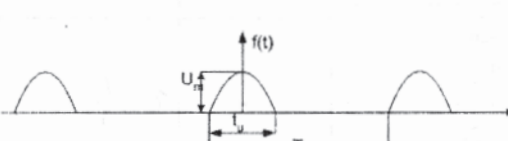
$$C_{\text{ПРАК}} = J_n V_{\text{ПРАК}} K_{\text{ПОТ}},$$

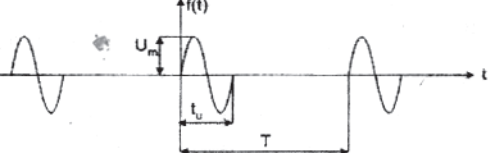
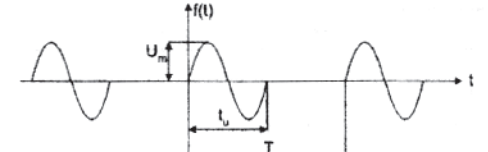
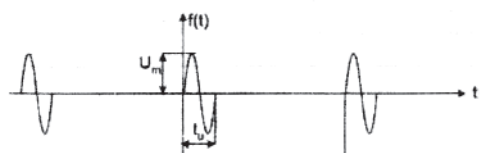
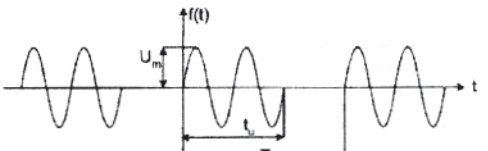
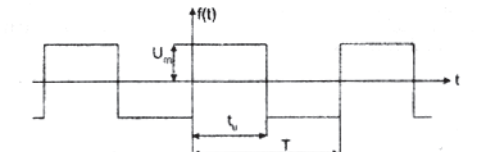
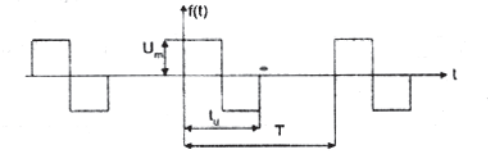
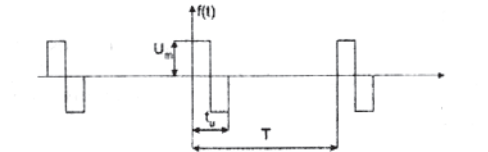
где J_n — среднее количество информации, содержащееся в n элементах кодовой комбинации простого двоичного кода.

Варианты заданий

№ варианта задания	Варианты задач	№ варианта задания	Варианты задач	№ варианта задания	Варианты задач	№ варианта задания	Варианты задач
01	1,21	26	8,29	51	17,39	76	6,29
02	2,22	27	9,30	52	18,40	77	7,30
03	3,23	28	10,31	53	19,21	78	8,31
04	4,24	29	11,32	54	20,22	79	9,32
05	5,25	30	12,33	55	1,23	80	10,33
06	6,26	31	13,34	56	2,24	81	13,37
07	7,27	32	14,35	57	3,25	82	14,38
08	8,28	33	15,36	58	4,26	83	15,39
09	9,29	34	16,37	59	5,27	84	16,40
10	10,30	35	17,38	60	6,28	85	17,21
11	11,31	36	18,39	61	11,34	86	18,22
12	12,32	37	19,40	62	12,35	87	19,23
13	13,33	38	20,21	63	13,36	88	20,24
14	14,34	39	1,22	64	14,37	89	1,25
15	15,35	40	2,23	65	15,38	90	2,26
16	16,36	41	7,29	66	16,39	91	3,27
17	17,37	42	8,30	67	17,40	92	4,28
18	18,38	43	9,31	68	18,21	93	5,29
19	19,39	44	10,32	69	19,22	94	6,30
20	20,40	45	11,33	70	20,23	95	7,31
21	3,24	46	12,34	71	4,24	96	8,32
22	4,25	47	43,35	72	2,25	97	9,33
23	5,26	48	14,36	73	3,26	98	10,34
24	6,27	49	15,37	74	4,27	99	11,35
25	7,28	50	16,38	75	5,28	00	12,36

Таблица 2

№ п/п	Вид сигнала	Дополнительные соотношения
1		$t_u = \frac{T}{2}$
2		$t_u = \frac{T}{4}$
3		$t_u = \frac{T}{6}$
4		$t_u = \frac{T}{2}$ $u = U_m \cos \frac{\pi}{t_u} t$ во время импульса
5		$t_u = \frac{T}{4}$ $u = U_m \cos \frac{\pi}{t_u} t$ во время импульса
6		$t_u = \frac{T}{6}$ $u = U_m \cos \frac{\pi}{t_u} t$ во время импульса

7		$t_u = \frac{T}{2}$ $u = U_m \sin \frac{2\pi}{t_u} t$ <p>во время импульса</p>
8		$t_u = \frac{T}{4}$ $u = U_m \sin \frac{2\pi}{t_u} t$ <p>во время импульса</p>
9		$t_u = \frac{T}{6}$ $u = U_m \sin \frac{2\pi}{t_u} t$ <p>во время импульса</p>
10		$t_u = \frac{T}{2}$ $u = U_m \sin \frac{4\pi}{t_u} t$ <p>во время импульса</p>
11		$t_u = \frac{T}{2}$
12		$t_u = \frac{T}{2}$
13		$t_u = \frac{T}{3}$

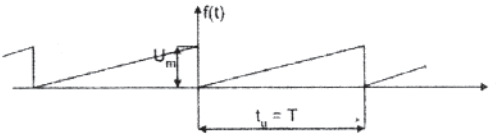
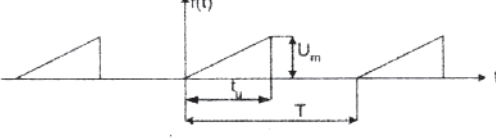
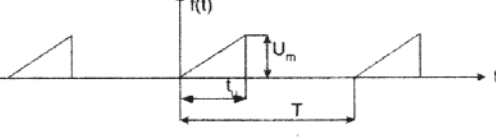
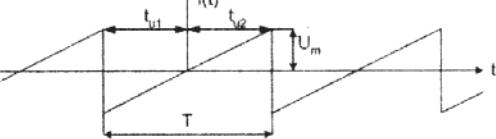
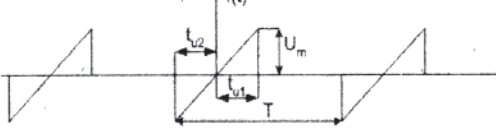
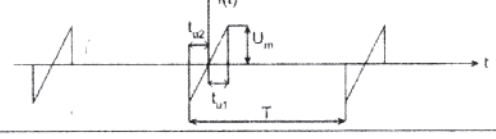
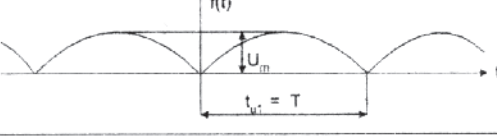
14		$t_u = T$ $f(t) = \frac{t}{t_u} U_m$
15		$t_u = \frac{T}{2}$
16		$t_u = \frac{T}{3}$
17		$t_{u1} = t_{u2} = \frac{T}{2}$
18		$t_{u1} = t_{u2} = \frac{T}{4}$
19		$t_{u1} = t_{u2} = \frac{T}{6}$
20		$u = U_m \sin \frac{\pi}{t_u} t$ во время импульса

Таблица 3

№ варианта задачи	Тип системы передачи информации	Код, используемый для передачи информации	Число передаваемых сообщений
1	2	3	4
21	Система без обратной связи	Код Хемминга с исправлением единичной ошибки	256
22	Система без обратной связи	Итеративный код	4000
23	Система с информационной связью	Обычный двоичный код	128
24	Система с решающей обратной связью с ожиданием ответа	Код с постоянным весом	511
25	Система с решающей обратной связью с ожиданием ответа	Код с четным числом единиц (код с проверкой на четность)	200
26	Система без обратной связи	Код Хемминга	400
27	Система с решающей обратной связью с ожиданием ответа	Корреляционный код (код с удвоенным элементом)	400
28	Система с решающей обратной связью с ожиданием ответа	Код с постоянным весом	100
29	Система с решающей обратной связью с ожиданием ответа	Код с четным числом единиц (код с проверкой на четность)	1000
30	Система с решающей обратной связью с ожиданием ответа	Инверсный код (код с повторением и инверсией)	100
31	Система без обратной связи	Код Хемминга	60
32	Система без обратной связи	Код Хемминга	100
33	Система без обратной связи	Код Хемминга	2000
34	Система с решающей обратной связью с ожиданием ответа	Код с постоянным весом	4000
35	Система с решающей обратной связью с ожиданием ответа	Корреляционный код	1000
36	Система с решающей обратной связью с ожиданием ответа	Код с постоянным весом	200
37	Система без обратной связи	Код Хемминга	3000
38	Система с решающей обратной связью с ожиданием ответа	Инверсный код (код с повторением и инверсией)	100
39	Система с решающей обратной связью с ожиданием ответа	Корреляционный код (код с удвоенным элементом)	200
40	Система с решающей обратной связью с ожиданием ответа	Код с постоянным весом	90

Таблица 4

№ варианта задачи	Циклический код	Производящий полином	Что нужно выполнить
21	(7, 4)	$1 + x + x^3$	Кодирующее устройство с использованием проверочного полинома
22	(8,6)	$1 + x^2$	-//-
23	(15, 5)	$1 + x + x^3 + x^4 + x^5 + x^8 + x^{10}$	-//-
24	-//-	-//-	Кодирующее устройство с делением на производящий полином
25	(7,4)	$1 + x + x^3$	Кодирующее и декодирующее устройства с делением на производящий полином
26	(8,6)	$1 + x^2$	-//-
27	(15,9)	$1 + x + x^2 + x^3 + x^5 + x^6$	Кодирующее устройство с использованием проверочного полинома
28	(15,9)	-//-	Декодирующее устройство с делением на производящий полином
29	(9,6)	$1 + x^3$	-//-
30	-//-	-//-	Кодирующее устройство с использованием проверочного полинома
31	(10,6)	$1 + x + x^2 + x^5 + x^4$	-//-
32	-//-	-//-	Кодирующее устройство с делением на производящий полином
33	-	$1 + x + x^3 + x^4 + x^8$	-//-
34	-	$1 + x^1 + x^7 + x^{10} + x^{12}$	-//-
35	-	$1 + x + x^5 + x^9 + x^{14}$	Декодирующее устройство с делением на производящий полином
36	-	$1 + x^3 + x^8 + x^9 + x^{15}$	-//-
37	(8,5)	$1 + x + x^2 + x^3$	-//-
38	-//-	-//-	Кодирующее устройство с использованием проверочного полинома
39	-	$1 + x^2 + x^5 + x^7 + x^9$	Кодирующее устройство с делением на производящий полином
40	-	$1 + x^3 + x^7 + x^{10} + x^{13}$	Декодирующее устройство с делением на производящий полином

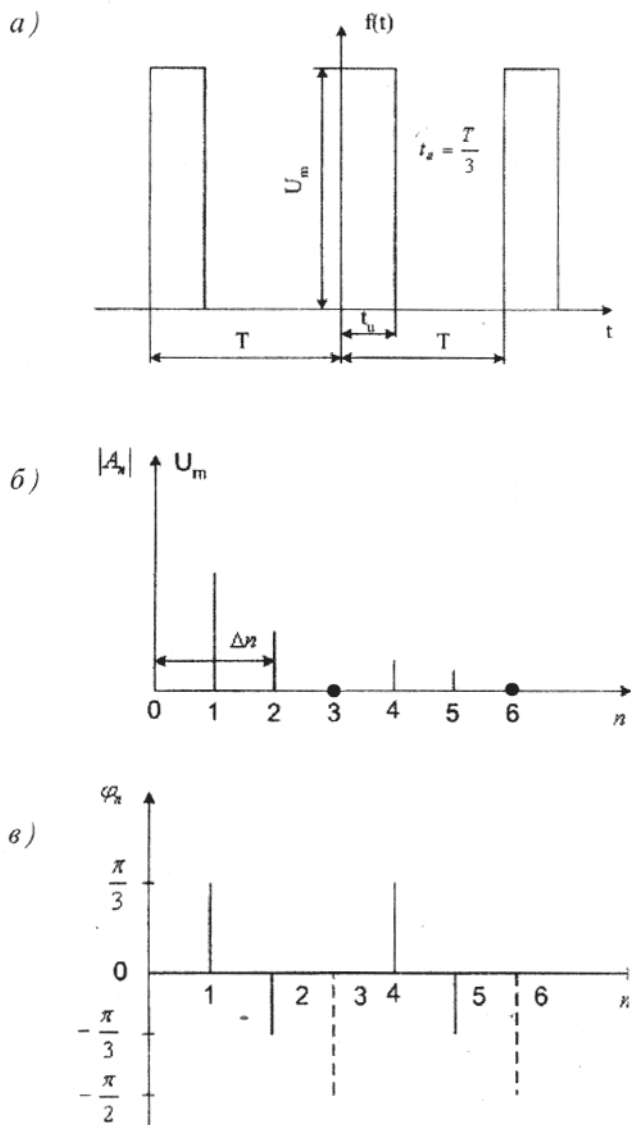


Рис. 1

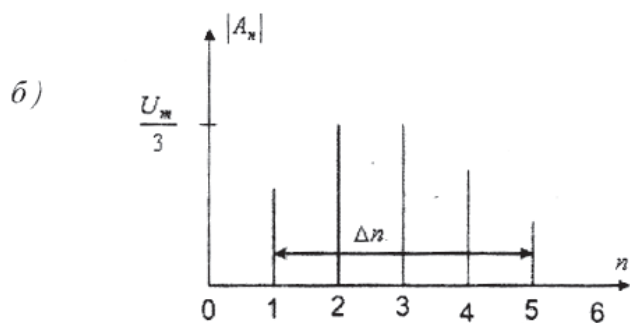
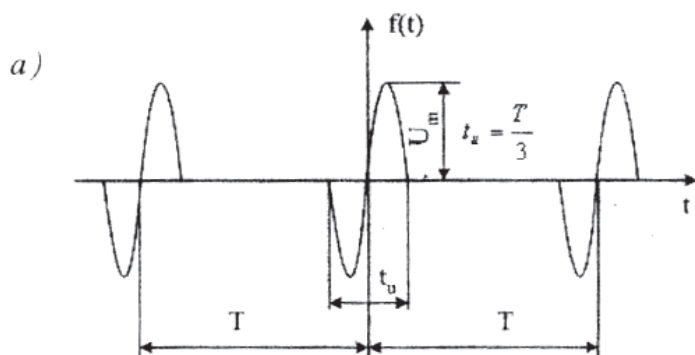


Рис. 2



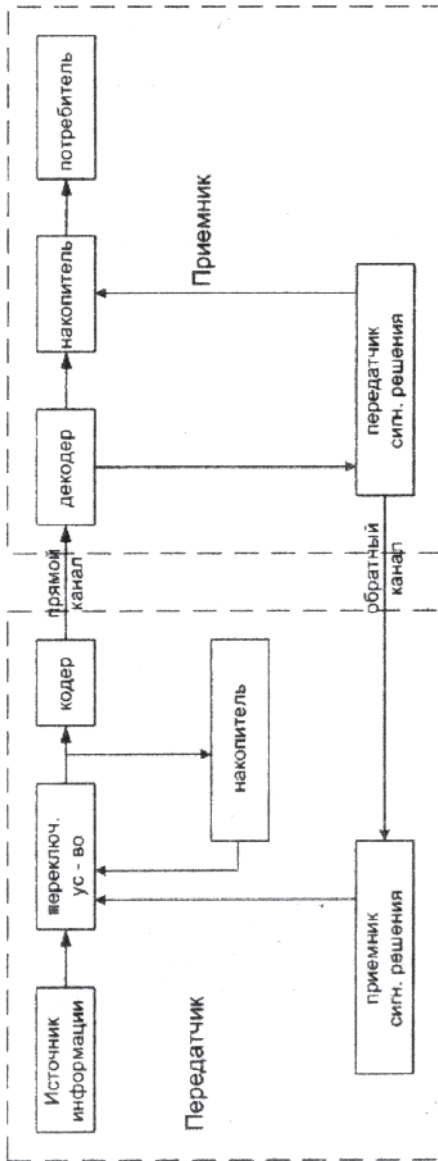


Рис. 4

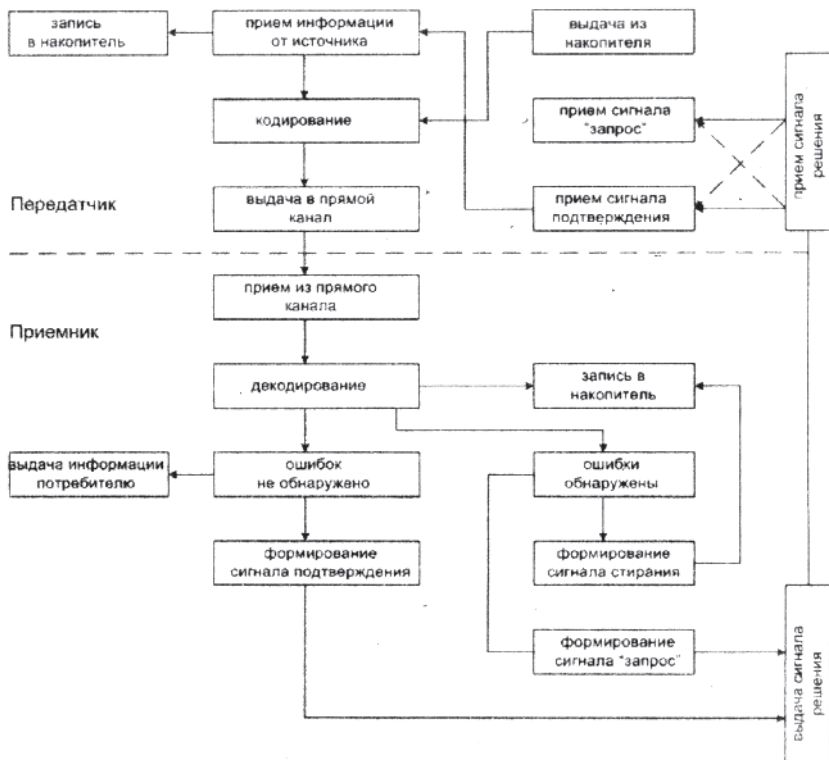


Рис. 5

Информационные символы	проверки по строкам
Проверки по столбцам	Проверка проверок

1	1	0	1	0	1
1	0	0	0	1	0
1	0	1	1	0	1
1	0	0	0	0	1
1	1	1	1	0	0
<hr/>					
1	0	0	1	1	1

Рис. 6

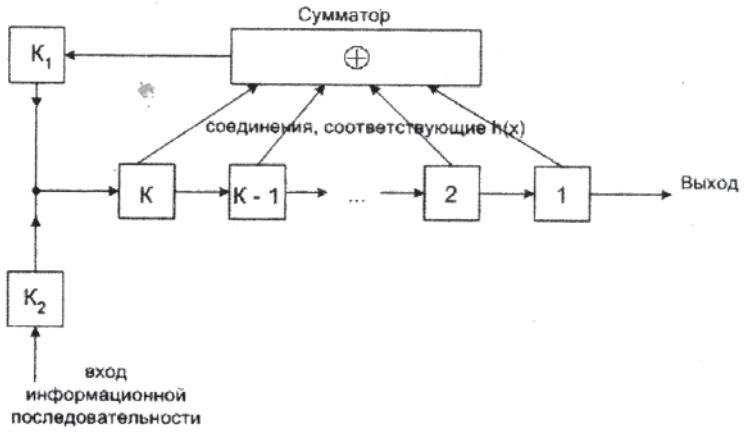
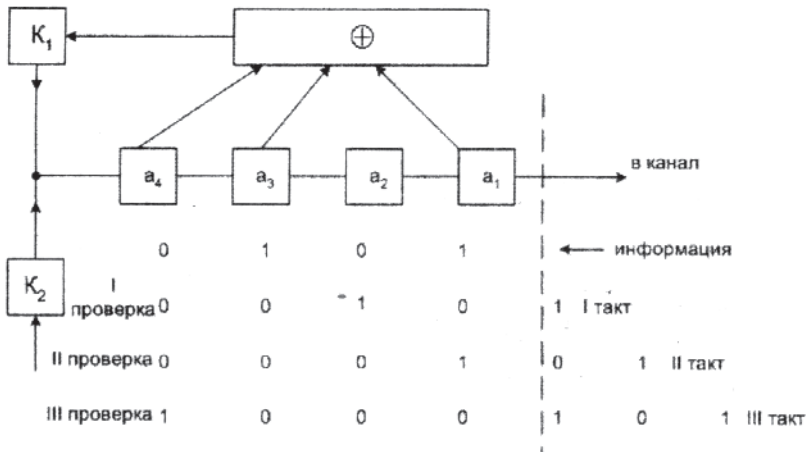


Рис. 7



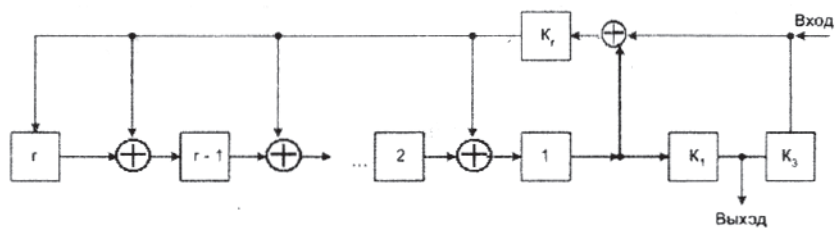


Рис. 9

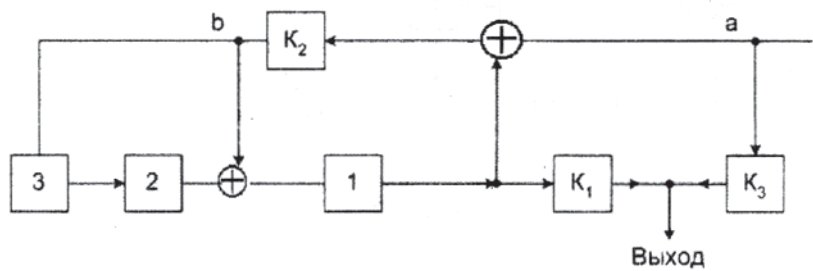


Рис. 10

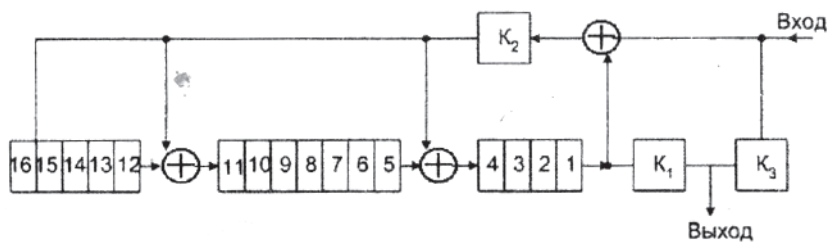


Рис. 11

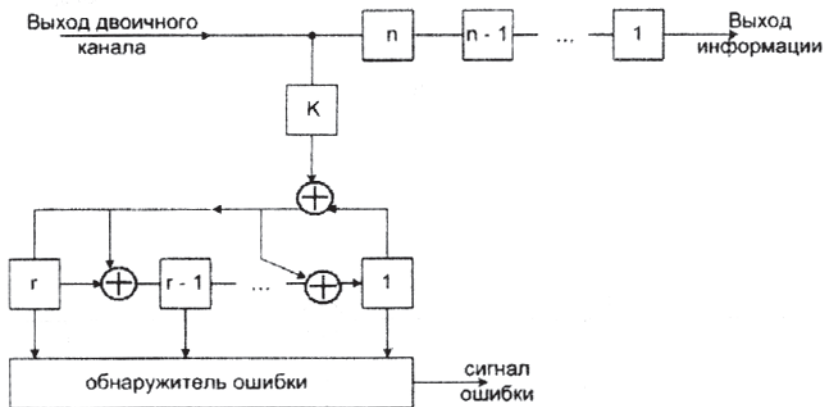


Рис. 12

Список литературы

1. Горелов Г.В., Фомин А.Ф., Волков А.А., Котов В.К. Теория передачи сигналов на железнодорожном транспорте. — М.: Транспорт, 1999.
2. Зюко А.Г., Кловский Д.Д., Коржик В.Н., Назаров В.Н. Теория электрической связи. — М.: Радио и связь, 1999.
3. Таныгин Ю.И. Теория передачи сигналов. — М.: РГОТУПС, 2002.

ТЕОРИЯ ПЕРЕДАЧИ СИГНАЛОВ

Методические указания
по проведению практических занятий

Редактор *Д.Н. Тихонычев*
Компьютерная верстка *Н.Ф. Цыганова*

Тип. зак. <i>603</i>	Изд. зак. 316	Тираж 400 экз.
Подписано в печать 07.08.03	Гарнитура Times.	Офсет
Усл. печ. л. 3,25		Формат 60×90 ¹ / ₁₆

Издательский центр РГОТУПСа,
125993, Москва, Часовая ул., 22/2

Типография РГОТУПСа, 107078, Москва, Басманный пер., 6