МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ПУТЕЙ СООБЩЕНИЯ

3/15/1

Одобрено кафедрой
«Высшая и прикладная
математика

Утверждено деканом
факультета
«Управление процессами
перевозок»

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ТЕХНОЛОГИИ РАБОТЫ ЖЕЛЕЗНЫХ ДОРОГ

Рабочая программа, задание на контрольную работу
с методическими указаниями
для студентов VI курса

специальности
190701 ОРГАНИЗАЦИЯ ПЕРЕВОЗОК И УПРАВЛЕНИЕ
НА ТРАНСПОРТЕ (ЖЕЛЕЗНОДОРОЖНЫЙ ТРАНСПОРТ) (Д)

специализации
190701-01 МАГИСТРАЛЬНЫЙ ЖЕЛЕЗНОДОРОЖНЫЙ
ТРАНСПОРТ (Д1)

РОАТ
Москва — 2009

Программа разработана на основании примерной учебной программы данной дисциплины, составленной в соответствии с государственными требованиями к минимуму содержания и уровню подготовки студента по специальности 190701.

С о с т а в и т е л и : проф. Карпухин В.Б., доц. Гушель Н.П.,
ст. преп. Еремин М.В.
Р е ц е н з е н т — доц. Биленко Г.М.

РАБОЧАЯ ПРОГРАММА

1. ЦЕЛЬ ИЗУЧЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ

Дисциплина «Математические модели технологии работы железных дорог» имеет цель формирования у студентов теоретических и практических знаний математического аппарата, необходимого для исследования сложных процессов технологии работы железных дорог, их особенностей в условиях различных типов неопределенности и принятия решений на основе метода математического моделирования.

Изучаемая дисциплина развивает логическое мышление, повышает общий уровень фундаментальной и профессиональной подготовленности специалиста, его инженерно-техническую культуру.

2.ТРЕБОВАНИЯ К УРОВНЮ ОСВОЕНИЯ СОДЕРЖАНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ

Изучив дисциплину «Математические модели технологии работы железных дорог», студент должен:

2.1. *Знать и уметь* использовать при исследовании технологии работы железных дорог математические понятия и методы теории вероятностей и математической статистики, основ исследования операций и принятия решений, линейного, нелинейного и динамического программирования, сетевого планирования и управления, теории массового обслуживания, математического моделирования транспортных процессов.

2.2. *Иметь опыт и навыки* построения вероятностных моделей, интерпретации полученных формальных результатов, применения метода математического моделирования для совершенствования организации, управления и планирования перевозочного процесса, повышения его эффективности.

2.3. *Иметь представление:*

- о математическом описании реальных перевозочных процессов на станциях, участках, железнодорожных полигонах с учетом случайных явлений и на необходимом уровне управления,
- о применении математического аппарата для получения новых знаний в области своей специальности при проведении научных исследований.

3. ОБЪЕМ ДИСЦИПЛИНЫ И ВИДЫ УЧЕБНОЙ РАБОТЫ

Вид учебной работы	Всего часов	Курс — VI
Общая трудоемкость дисциплины	150	
Аудиторные занятия:	20	
лекции	12	
практические занятия	8	
Самостоятельная работа:	115	
контрольная работа	15	Зачет
Вид итогового контроля		Экзамен

4. СОДЕРЖАНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ

4.1. Разделы дисциплины и виды занятий

Раздел дисциплины	Лекционные занятия, ч	Практические занятия, ч	Самостоятельная работа, ч
1	*2*	*3*	*4*
1. Теория вероятностей. Случайные величины и законы их распределения. Элементы теории информации	2	1	17
2. Основы математической статистики. Математическая обработка результатов наблюдений	2	1	16

Окончание табл.

1	2	3	4
3. Основы исследования операций и теории принятия решений	2	1	16
4. Линейное, нелинейное и динамическое программирование	1	2	17
5. Сетевое планирование и управление. Управление запасами	2	—	16
6. Теория массового обслуживания	1	1	16
7. Математическое моделирование транспортных процессов	2	2	17

4.2. СОДЕРЖАНИЕ РАЗДЕЛОВ ДИСЦИПЛИНЫ

Раздел 1
Теория вероятностей. Случайные величины и законы их распределения. Элементы теории информации

1.1. Понятия и определения. Частота и вероятность события, их свойства. Основные теоремы теории вероятностей: теорема сложения вероятностей, теорема умножения вероятностей.

1.2. Повторение испытаний. Формула Бернулли. Наивероятнейшее число наступления событий при повторении испытаний.

1.3. Общая характеристика случайных величин и законов их распределения. Функция распределения и ее свойства. Плотность распределения и ее свойства. Числовые характеристики случайной величины: математическое ожидание, мода, медиана, дисперсия, среднее квадратическое отклонение, коэффициент вариации. Моменты случайной величины.

1.4. Закон больших чисел.

1.5. Законы распределения случайных дискретных величин: биноминальное распределение, распределение Пуассона, полиноминальное распределение, гипергеометрическое распределение, распределение Паскаля.

1.6. Законы распределения случайных непрерывных величин: нормальное распределение, равномерное распределение, показательное распределение, распределение Эрланга.

1.7. Элементы теории информации. Основные понятия. Энтропия и информация. Кодирование сообщений. Пропускная способность линий связи.

[2, гл. 1, 2], [3, раздел 1, гл. 1-4], [4, гл. 1-14], [5, гл. 1-6], [10, гл. 6.1-6.3], [Доп. 1, гл. 4], [Доп. 2, гл. 1], [Доп. 4, гл. 1-3]

Раздел 2.
Основы математической статистики. Математическая обработка результатов наблюдений

2.1. Обработка статистических данных. Частота, относительная частота, плотность относительной частоты. Статистический ряд. Статистическое распределение. Гистограмма и кривая распределения.

2.2. Критерии согласия: критерий согласия Пирсона χ^2, критерий согласия А.Н. Колмогорова.

2.3. Корреляционный анализ.

2.4. Методы определения параметров эмпирической формулы: метод выбранных точек, метод средних, метод наименьших квадратов. Метод Чебышева. Интерполирование и метод выравнивания.

[2, гл. 3], [4, гл.15-18], [5, гл. 9-12], [10, гл. 6.4, 6.6, 6.7], [3, раздел 4, гл. 1-3, 6], [Доп. 1, гл. 4], [Доп. 4, гл. 4, 5]

Раздел 3.
Основы исследования операций и теории принятия решений

3.1. Основные этапы операционного исследования. Постановка задачи. Построение математической модели. Нахождение решения. Проверка и корректировка модели.

3.2. Типичные классы задач: управление запасами, распределение ресурсов, ремонт и замена оборудования, массовое обслуживание, упорядочение, сетевое планирование и управление, выбор маршрута.

3.3. Принципы принятия решений в задачах исследования операций. Элементы процесса принятия решений и классификация задач. Принятие решений в условиях определенности. Методика определения полезности. Принятие решений в условиях риска. Принятие решений в условиях неопределенности. Критерий Вальда. Критерий Гурвица. Критерий Лапласа. Критерий Сэвиджа.

3.4. Разработка математических моделей в задачах исследования операций. Классификация моделей. Принципы построения моделей.

3.5. Имитационное моделирование систем организационного управления. Основные этапы процесса имитации. Проверка модели. Стратегическое и тактическое планирование. Экспериментирование и анализ чувствительности.

3.6. Деловые игры как модели.

[1, гл. 5; 8], [2, гл. 4], [6, гл. 1], [7, гл. 1, 9], [8, гл. 10], [Доп. 1, гл. 8], [Доп. 3,гл. 1, 9], [Доп. 4, гл. 6], [Доп. 6, гл. 1]

Раздел 4.
Линейное, нелинейное и динамическое программирование

4.1. Основные понятия. Математическая модель задачи линейного программирования. Симплексный метод.

4.2. Транспортная задача. Математическая модель закрытой и открытой задачи. Матрица перевозок. Теорема о ранге матрицы перевозок. Методы построения опорного плана.

4.3. Цикл. Пересчет опорного плана по циклу. Метод потенциалов. Косвенные и истинные тарифы. Критерий оптимальности.

4.4. Целочисленная линейная оптимизация. Постановка задачи. Метод Гомори. Метод ветвей и границ решения задачи.

4.5. Потоки в сетях. Постановка и алгоритм решения задачи о максимальном потоке. Теорема Форда — Фалкерсона. Алгоритм Форда нахождения максимального потока.

4.6. Задача о потоке минимальной стоимости. Постановка задачи. Задача о кратчайшем маршруте. Алгоритм Басакера — Гоуэна нахождения оптимального потока.

4.7. Нелинейное программирование. Постановка задачи и особенности ее решения. Графическое решение задачи. Метод множителей Лагранжа.

4.8. Динамическое программирование. Многошаговые процессы в динамических задачах. Принцип оптимальности и рекуррентные соотношения. Вычислительная схема. Планирование производственной программы.

[1, гл. 1-4], [2, гл. 6, 7], [7, гл. 2-5], [8, гл. 2, 3, 5], [9, гл. 1-3], [10, гл. 7.1], [11, гл 2, 3, 6, 9, 12], [Доп. 1, гл. 6, 7], [Доп. 3, гл. 2, 3], [Доп. 4, гл. 6-8], [Доп. 5, Т. 1, II-1, II-2, II-3, II-4, II-6, III-9], [Доп. 6, гл. 2-6]

Раздел 5. Сетевое планирование и управление. Управление запасами

5.1. Общие понятия сетевого планирования и управления. Сетевой график и его элементы. Правила построения и параметры сетевого графика, их расчет. Увязка сетевых графиков с наличными ресурсами.

5.2. Понятие о вероятностных моделях сетевого планирования. Построение линейной диаграммы.

5.3. Анализ и совершенствование станционной технологии с использованием сетевых графиков. Обслуживание подъездных путей на железнодорожных станциях.

5.4. Общие положения по управлению запасами. Периодическое и релаксационное управление запасами. Постоянный и обязательно удовлетворяющийся спрос. Случайный спрос.

[2, гл. 8], [8, гл. 8, 9], [10, гл. 7.2], [11, гл. 8], [Доп. 3,гл. 10], [Доп. 4, гл. 9, 11], [Доп. 5,Т. 2, 1-4], [Доп. 6, гл. 6, § 3, 4]

Раздел 6. Теория массового обслуживания

6.1. Основные понятия. Потоки событий. Классификация систем массового обслуживания (СМО) и их характеристики.

6.2. Одноканальная СМО с отказами.

6.3. Многоканальная СМО с отказами.

6.4. Одноканальная СМО с ожиданием.

6.5. Многоканальная СМО с ожиданием.

6.6 Замкнутые СМО.

[2, гл. 4], [3. раздел 3,гл. 1, 2], [7, гл. 8], [Доп. 1,гл. 10], [Доп. 3, гл. 5], [Доп. 4,гл. 10], [Доп. 5,Т. 1, III-2]

Раздел 7.
Математическое моделирование транспортных процессов

7.1. Определение и назначение моделирования. Классификация моделей. Классификация математических моделей.

7.2. Этапы построения математической модели.

7.3. Структурные модели. Способы построения, примеры.

7.4. Моделирование в условиях неопределенности. Причины появления неопределенностей и их виды. Моделирование в условиях неопределенности, описываемой с помощью теории нечетких множеств. Моделирование в условиях стохастической неопределенности. Моделирование марковских случайных процессов.

7.5. Аналитические и статистические модели. Достоверность результатов моделирования. Необходимое число реализаций модели.

7.6. Случайные события и случайные величины с заданным законом распределения в работе станции. Моделирование случайных величин, распределенных по закону Эрланга, по нормальному закону, по произвольному закону.

7.7. Моделирование состава поезда.

7.8. Взаимосвязь технологических показателей и параметров технического оснащения станций. Модель взаимодействия между поступлением и расформированием поездов.

7.9. Процесс накопления вагонов в сортировочном парке. Математическое моделирование процесса накопления.

7.10. Вероятностный анализ вагонопотоков в работе железнодорожных узлов. Учет влияния колебаний вагонопотоков при составлении оптимального варианта плана формирования поездов.

7.11. Общая схема моделирования перевозочного процесса на плановый период.

7.12. Эксплуатационные расчеты с применением теории информации.

[12, гл. 1, 2, 4, 5], [Доп. 2, гл. 3-7], [Доп. 4, гл. 12], [Доп. 7, гл. 1], [Доп. 8,гл. 1, 9], [Доп. 9,гл. 1, 2], [Доп. 10, гл. 1]

4.3. Контрольная работа

В процессе изучения дисциплины «Математические модели технологии работы железных дорог» в соответствии с учебным планом студенты заочной формы обучения выполняют одну контрольную работу и сдают по ней зачет.

5. УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ

5.1. Рекомендуемая литература

Основная

1. Васин А.А., Краснощеков П.С., Морозов В.В. Исследование операций. – М.: «Академия», 2008.

2. Красс М.С., Чупрынов Б.П. Математика в экономике. Математические методы и модели. — М.: Финансы и статистика, 2007.

3. Вероятностные разделы математики / Под ред. Максимова Ю.Д. – СПб.: «Иван Федоров», 2004.

4. Гмурман В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика. — М.: Высшая школа, 2008.

5. Гмурман В.Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике. – М.: Высшая школа, 2008.

6. Черноруцкий И.Г. Методы принятия решений. – СПб.: БХВ – Петербург, 2005.

7. Даньшин С.Т., Кляус К.М, Филимонов Г.Д. Что такое исследование операций? Элементы математических методов. — СПб.: Сократ, 2005.

8. Математические методы и модели исследования операций /Под ред. Колемаева В.А. – М.: ЮНИТИ – ДАНА, 2008.

9. Кузнецов Ю.Н., Кузубов В.И., Волощенко А.Б. Математическое программирование. — М.: Высшая школа, 2004.

10. Шапкин А.С. Задачи по высшей математике, теории вероятностей, математической статистике, математическому программированию с решениями. – М.: Издательская – торговая корпорация «Дашков и К°», 2006.

11. Костевич Л.С. Математическое программирование. Информационные технологии оптимальных решений. –Мн.: Новое знание, 2003.

12. Введение в математическое моделирование / Под ред. Трусова П.В. – М.: Логос, 2005.

Дополнительная

1. Коршунов Ю.М. Математические основы кибернетики. –М.: Энергия, 1980.

2. Мартынов И.М., Сотников Е.А. и др. Эксплуатационные расчеты с применением теории вероятностей. –М.: Транспорт, 1970.

3. Вентцель Е.С. Исследование операций. – М.: Сов. Радио, 1972.

4. Акулиничев В.М., Кудрявцев В.А., Корешков А.Н. Математические методы в эксплуатации железных дорог. — М.: Транспорт, 1981.

5. Исследование операций. Т1 Методологические основы и математические методы. Т2 Модели и применения /Под ред. Дж. Моудера и С.Элмаграби. – М.: Мир,1981.

6. Зайченко Ю.П. Исследование операций. — Киев: Вища школа, 1979.

7. Самарский А.А., Михайлов А.П. Математическое моделирование. Идеи. Методы. Примеры. – М.: Физматлит, 2002.

8. Советов Б.Я.. Яковлев С.А. Моделирование систем. – М.: Высшая школа, 2001.
9. Зарубин В.С. Математическое моделирование в технике. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2001.
10. Андриевский Б.Р., Фрадков А.Л. Элементы математического моделирования в программных средах MATLAB 5 и Scilab. –СПб.: Наука, 2001
11. Математическое моделирование экономических процессов на ж-д. тр-те /Под ред. А.Б. Каплана – М.: Транспорт, 1984.

5.2. Средства обеспечения освоения дисциплины

Компьютерные программы

1. Очков В.Ф. Mathcad 14 для студентов, инженеров и конструкторов. — СПб: БХВ – Петербург, 2007.
2. Плис А.И., Сливина Н.А. Mathcad: Математический практикум для инженеров и экономистов. –М.: Финансы и статистика, 2003.
3. Дьяконов В.П. Maple 9.5/10 в математике, физике и образовании. — М.: Салон- Пресс, 2006.
4. Лавренов С.И. Excel: сборник примеров и задач. –М.: Финансы и статистика, 2002.
5. Ларсен Р.У. Инженерные расчеты в Excel. –М.: Вильямс, 2004.

6. МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ ПО ОРГАНИЗАЦИИ ИЗУЧЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ

Основной объем учебной работы студент выполняет самостоятельно, изучая рекомендуемую литературу, в соответствии с учебным материалом рабочей программы, выполняя контрольную работу и подготовку к сдаче зачета по контрольной работе и экзамена по курсу дисциплины, предусмотренные учебным планом. Контрольная работа состоит из двух задач. Вариант задания на задачу 1 выбирается по предпоследней и последней цифрам учебного шифра, на задачу 2 – по последней цифре. При необходимости студент консультируется у преподавателя. Лекционные и практические занятия в вузе во время учебной сессии являются установочными.

В процессе обучения рекомендуется использовать современные версии пакетов прикладных программ для математических расчетов: Mathematica, Matlab, Mathcad, Maple, Derive, Excel, Statistica, Maxima, Scilab. Применение компьютерной техники и прикладных программ имеет целью сокращение времени выполнения расчетов и оформления полученных результатов, но не может заменить изучение и освоение метода решения задач. Поэтому задачи и необходимые примеры с выполнением всех промежуточных расчетов предварительно решаются вручную и лишь затем, при необходимости использовать освоенные методы и будучи уверенным в правильности их применения и получения ожидаемых результатов, в целях сокращения времени на рутинную работу применяется быстродействующая вычислительная техника.

ЗАДАНИЕ НА КОНТРОЛЬНУЮ РАБОТУ С МЕТОДИЧЕСКИМИ УКАЗАНИЯМИ

Задача 1

Тема: Составление планов формирования поездов на основе вероятностного анализа вагонопотоков

Задание

Полигон с четырьмя станциями А, Б, В, и Г должен пропустить суточные объемы вагонопоков $N_1 \div N_6$ по заданным направлениям в соответствии с нормативными показателями работы сортировочных парков на станциях А, Б и В.

Требуется:

1. Составить план формирования поездов.

2. Выполнить вероятностный анализ плана и рассмотреть возможные его варианты с учетом случайного характера суточных объемов вагонопотоков N_1 и N_4.

Варианты исходных данных представлены в табл. 1.

Таблица 1

Варианты исходных данных

Наименование исходных данных	Станция (назначение)	Последняя цифра учебного шифра									
		0	1	2	3	4	5	6	7	8	**9**
Вагоно-часы простоя под накоплением, $T = cm$	А	1200	800	1000	900	850	1500	950	1100	1400	1300
	Б	1000	1100	1200	800	1400	1300	900	850	1050	950
	В	1200	800	1000	900	850	1500	950	1100	1400	1300
Экономия от проследования станции без переработки, $t_{эк}$, ч/ваг.	Б	0,7	1,0	1,8	4,5	0,5	1,5	3,2	2,8	4,2	7,5
	В	6,0	6,0	6,2	3,5	6,5	5,0	4,0	3,0	3,8	2,5
Среднее квадратическое отклонение вагонопотоков, σ		50	56	66	75	70	82	90	87	97	84
Параметр «*a*» в равномерном распределении		90	50	30	60	40	95	25	45	55	35

Окончание табл. 1

Наименование исходных данных	Станция (назначение)	Последняя цифра учебного шифра									
		0	1	2	3	4	5	6	7	8	**9**
Среднесуточные вагонопотоки	АГ	400	250	180	150	190	300	170	200	220	160
	АБ	20	15	23	28	18	50	25	30	16	40
	АВ	15	38	25	30	40	0	35	20	60	17
	БГ	180	200	250	300	260	300	350	380	430	450
	БВ	0	28	38	50	30	40	0	47	33	60
	ВГ	40	37	25	0	35	30	43	50	0	20
		Предпоследняя цифра учебного шифра									
		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Законы распределения вагонопотоков	АГ	П	Э2	З	П	Э3	Р	Э2	Э4	Э3	Э3
	БГ	Н	Э3	Н	Э4	Н	П	П	П	Э4	П

Примечания: 1. σ — среднее квадратическое отклонение в нормальном законе распределения вагонопотока.

2. Условные обозначения законов распределения: Н – нормального, П – показательного, Р – равномерного, Э2,Э3,Э4 — Эрланга 2-, 3-, 4-го порядков.

Методика типового решения

1. Необходимое условие выделения вагонопотока в вагонопоток самостоятельного назначения

Пусть $t_{\text{нак}}$ – средний простой одного вагона под накоплением, $n_{\text{ОТ}}$ – число поездов данного назначения, отправляемых из сортировочного парка за сутки, m – число вагонов в одном составе, тогда вагоны-часы T накопления вагонов за сутки в сортировочном парке определяются по формуле

$$T = t_{\text{нак}} \cdot n_{\text{ОТ}} \cdot m = cm. \tag{1}$$

Величина $c = t_{\text{нак}} \cdot n_{\text{ОТ}}$ называется *параметром накопления* [Доп. 2],[Доп. 4].

Зная нормативы на величины c и m, при заданной суточной величине вагонопотока N величина $t_{\text{нак}}$ определяется по формуле

$$t_{\text{нак}} = \frac{cm}{N}. \tag{2}$$

Пусть $t_{\text{эк}}$ – экономия времени на одном вагоне от проследования им попутной технической станции без переработки. Тогда вагонопоток N целесообразно выделить в самостоятельное назначение, если простой N вагонов под накоплением (вагоно-часы накопления T) за сутки меньше $N \cdot t_{\text{эк}}$ – экономии времени от проследования вагонопотоком N попутной технической станции без переработки:

$$cm \le N \cdot t_{\text{эк}}. \tag{3}$$

Выражение (3) определяет требование непрерывности перевозочного процесса и является необходимым условием эффективной работы сортировочного парка:

экономия времени на движении вагонопотока через попутную техническую станцию без переработки должна превышать время простоя вагонопотока под накоплением в сортировочном парке.

Из (3) получаем величину вагонопотока N, выделяемого в струю потока самостоятельного назначения:

$$N \geq \frac{cm}{t_{\text{эк}}}. \tag{4}$$

В более общем случае, для полигона в целом, если на пути вагонопотока N несколько, $j = 1,...., \kappa$ попутных технических станций, то условие (4) будет необходимым при рассмотрении суммарной величины $\sum_{j=1}^{j=\kappa} t_{j,\text{эк}}$ экономии времени на одном вагоне от проследования им без переработки всех попутных технических станций, $j = 1,...., \kappa$:

$$N \geq \frac{cm}{\sum_{j=1}^{j=\kappa} t_{i,\text{эк}}}. \tag{5}$$

Предположим, что суточные значения вагонопотока N в силу целого ряда заранее неизвестных причин подвержены случайным изменениям и заранее неизвестны. Вагонопоток N, являясь таким образом случайной величиной, описывается определенным законом распределения вероятностей и может уменьшаться до величины

$$N < \frac{cm}{\sum_{j=1}^{j=\kappa} t_{i,\text{эк}}}. \tag{6}$$

Вагонопоток N, соответствующий величине (6), перестает удовлетворять условию (5) выделения в струю потока самостоятельного назначения.

Выводы: 1. Вагонопоток N рассчитывается по нормативам на величины c, m, $t_{\text{эк}}$, задаваемым для каждой сортировочной станции, а также с помощью закона распределения его вероятностей.

2. План формирования поездов, учитывающий случайный характер изменений величины вагонопотока N, составляется на основе вероятностного анализа условия (5) выделения и условия (6) не выделения вагонопотока N в струю потока самостоятельного назначения

3. При выполнении необходимого условия (5) вагонопоток N выделяется в самостоятельное назначение и определяется вероятность этого события. При невыполнении (5) вагонопоток N объединяется с другими потоками и также определяется вероятность данного события.

2. Пример

Полигон с четырьмя станциями А, Б, В, и Г должен пропустить суточные объемы вагонопотоков $N_1 \div N_6$ по заданным направлениям в соответствии с нормативными показателями работы сортировочных парков на станциях А, Б и В.

Таблица 2

Исходные данные

Станция назначения / Станция отправления	А	Б	В	Г
А	–	$N_3 = 50$	$N_2 = 40$	$N_1 = 160$
Б	–	–	$N_5 = 30$	$N_4 = 400$
В	–	–	–	$N_6 = 60$
Г	–	–	–	–
Вагоно-часы накопления, $T = cm$	1000	900	1000	–
Экономия времени на вагон, $t_{эк}$	–	3,5	3	–

Требуется:

1. Составить план формирования поездов.

2. Выполнить вероятностный анализ плана и рассмотреть возможные его варианты с учетом случайного характера суточных объемов вагонопотоков N_1 и N_4, описываемого нормальными законами распределения вероятностей с параметрами:

$$M(N_1) = 160,\ \sigma(N_1) = 46, \qquad M(N_4) = 400,\ \sigma(N_4) = 98,$$

где M и σ – символы математического ожидания и среднего квадратического отклонения.

Исходные данные представлены в табл. 2.

Решение

1. Рассчитаем план формирования поездов по средним значениям вагонопотоков $N_1 \div N_6$ (вариант 1, рис. 1). Используем условия (5) и (6) выделения или не выделения вагонопотоков $N_1 \div N_6$ в потоки самостоятельного назначения.

1.1. Проверка выполнения условия (5) для вагонопотока N_1.

В соответствии с необходимым условием (5) для вагонопотока N_1 требуется получить

$$N_1 \geq \frac{1000}{6{,}5} = 154.$$

Поскольку $N_1 = 160 > 154$, то условие (5) выполняется, что является основанием для выделения вагонопотока N_1 в самостоятельное назначение АГ.

1.2. Для потока N_2 требуется

$$N_2 \geq \frac{1000}{3{,}5} = 286.$$

Поскольку $N_2 = 40 < 286$, то условие (5) не выполняется и следовательно, поток N_2 объединим с другими потоками. К ним относятся потоки $N_3 = 50$ и $N_5 = 30$, которые имеют своим назначением только следующие станции, получим $N_2 + N_3 =$ $= 90$(АБ), $N_2 + N_5 = 70$ (БВ).

1.3. Проверка выполнения условия (5) для потока N_4:

$$N_4 \geq \frac{900}{3} = 300.$$

Поскольку $N_4 = 400 > 300$, то условие (5) выполняется и, следовательно, поток N_4 выделяется в самостоятельное назначение БГ.

1.4. **Вывод**. План формирования поездов, рассчитанный по средним N_i значениям вагонопотоков $N_i \approx M(N_i)$ на основании условия (5) выделения их в самостоятельное назначение, предусматривает организацию отправления следующих вагонопотоков:

$N_1 = 160$ по направлению АГ,

$N_2 + N_3 = 40 + 50 = 90$ по направлению АБ,

$N_2 + N_5 = 40 + 30 = 70$ по направлению БВ,

$N_4 = 400$ по направлению БГ,

$N_6 = 60$ по направлению ВГ.

План представлен на рис. 1 (вариант 1).

2. Определим вероятность выполнения полученного плана формирования поездов, учитывая случайный характер вагонопотоков N_1 и N_4. Пусть случайное событие $A_1 = (N_1 \geq 154,$ $N_4 \geq 300$).

2.1. Выделение вагонопотока N_1 в самостоятельное назначение будет эффективным при $N_1 \geq 154$ вагонов. Вероятность этого случайного события равна [3], [Доп. 4]:

$$P\left(N_1 \geq 154\right) = 1 - \Phi\left(\frac{N_1 - M(N_1)}{\sigma(N_1)}\right) =$$
$$= 1 - \Phi\left(\frac{154 - 160}{46}\right) = 1 - \Phi(-0{,}13) = 1 - 0{,}4483 = 0{,}5517, \tag{7}$$

где $\Phi(x)$ – функция распределения стандартной нормальной случайной величины $X \in N(x,0;1)$ (функция Лапласа):

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = P(X < x). \tag{8}$$

Значения функции $\Phi(x)$ приведены в приложении 3. В расчете вероятности P $(N_1 \geq 154)$ использована теорема сложения вероятностей противоположных событий:

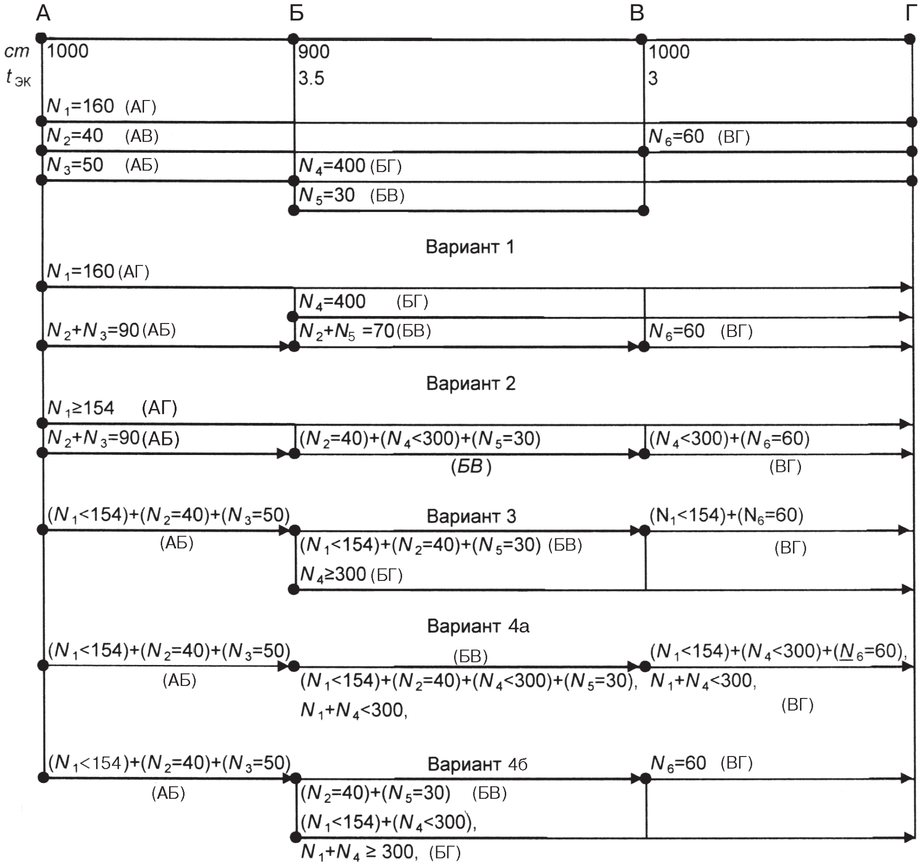


Рис. 1. Схема полигона АГ и варианты плана формирования поездов

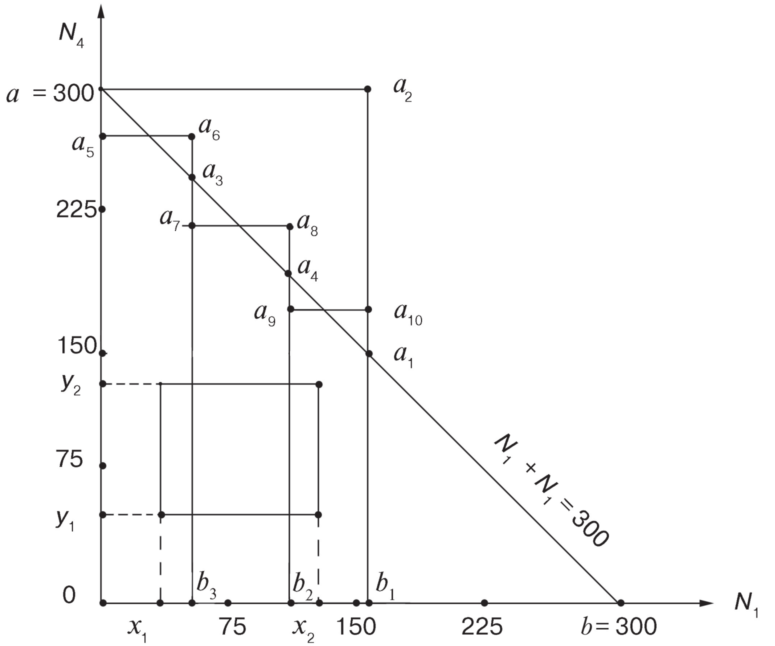
$$P(X \geq x) + P(X < x) = 1.$$

2.2. Аналогично определяем вероятность выделения потока N_4 в самостоятельное назначение при $N_4 \geq 300$:

$$P(N_4 \geq 300) = 1 - \Phi\left(\frac{N_4 - M(N_4)}{\sigma(N_4)}\right) = 1 - \Phi\left(\frac{300-400}{98}\right) =$$

$$= 1 - \Phi(-1{,}02) = 1 - 0{,}1539 = 0{,}8461. \qquad (9)$$

2.3. Поскольку вагонопотоки N_1 и N_4 независимы, то вероятность $P(A_1)$ события A_1 одновременного их выделения в самостоятельное назначение, а, следовательно, что то же самое, вероятность $P(A_1)$ выполнения полученного плана формирования поездов (вариант 1, рис. 1) в соответствии с теоремой умножения вероятностей независимых событий будет равна:



$b_3 = 50$, $b_2 = 1000$, $b_1 = 154$, $a_5 = 275$, $a_7 = (50; 225)$, $a_9 = (100; 173)$

Рис. 2. Определение вероятностей $P(A_5) = P_B(A_4)$ и $P(A_6) = P_B(A_4)$

$$P(A_1) = P\,[(N_1 \geq 154) \cdot (N_4 \geq 300)] =$$

$$= P\,(N_1 \geq 154) \cdot P\,(N_4 \geq 300) = 0{,}5517 \cdot 0{,}8461 = 0{,}4668.$$

3. Проанализируем различные варианты плана формирования поездов при случайных событиях

$$A_2 = (N_1 \geq 154,\ N_4 < 300),\ \ A_3 = (N_1 < 154,\ N_4 \geq 300),$$

$$A_4 = (N_1 \geq 154,\ N_4 \geq 300).$$

Значения $N_1 = 154$ и $N_4 = 300$ назовем *критическими*.

3.1. Пусть не отвечает необходимому условию вначале более короткое назначение БГ с вагонопотоком N_4 при сохранении вагонопотока $N_1 \geq 154$ по назначению АГ.

Вероятность $P\,(N_4 < 300)$ определена и равна 0,1539. Вероятность $P(A_2)$ такого варианта (варианта 2), как вероятность совпадения двух независимых случайных событий $N_1 \geq 154$ и $N_4 < 300$ определяется в соответствии с теоремой умножения вероятностей независимых событий:

$$P(A_2) = P\,[(N_1 \geq 154) \cdot (N_4 < 300)] = P\,(N_1 \geq 154)$$

$$P\,(N_4 < 300) = 0{,}5517 \cdot 0{,}1539 = 0{,}0849.$$

На рис. 1 представлен вариант 2 плана формирования поездов:

$$N_1 \geq 154\ (\text{АГ}),\ N_2 + N_4 = 90\ (\text{АБ}),$$

$$[(N_2 = 40) +\cdot\ (N_4 < 300) + (N_5 = 30)]\ (\text{БВ}),$$

$$[(N_4 < 300) + (N_5 = 60)]\ (\text{ВГ}).$$

3.2. Пусть $N_1 < 154$, а $N_4 \geq 300$, тогда получим вариант 3 (рис.1) плана формирования поездов с вероятностью:

$$P(A_3) = P\,[(N_1 < 154) \cdot (N_4 \geq 300)] = P\,(N_1 < 154) \cdot$$

$$\cdot\ P\,(N_4 \geq 300) = 0{,}4483 \cdot 0{,}8461 = 0{,}3793.$$

В самостоятельное сквозное назначение выделяется только вагонопоток $N_4 \geq 300$.

Проверим, удовлетворит ли необходимому условию (5) в этом варианте объединение потоков N_1 и N_2 для формирования сквозного назначения поездов в направлении АВ. Возьмем наибольшее возможное значение, равное критическому $N_1 = 154$, и объединим с $N_2 = 40$:

$$(N_1 = 154) + (N_2 = 40) = 194.$$

Для объединения N_1 и N необходимо, чтобы их сумма была бы не меньше требуемой (условие (5)):

$$N_1 + N_2 \quad \frac{1000}{3{,}5} = 286.$$

Но поскольку $(N_1 = 154) + (N_2 = 40) = 194 < 286$, то объединение только вагонопотоков N_1 и N_2 для формирования сквозного назначения поездов в направлении АВ нецелесообразно. В результате получим вариант 3 плана формирования поездов (рис 1) :

$$[(N_1 < 154) + (N_2 = 40) + (N_3 = 50)] \text{ (АБ)},$$

$$[(N_1 < 154) + (N_2 = 40) + (N_5 = 30)] \text{ (БВ)},$$

$$N_4 \geq 300 \text{ (БГ)},$$

$$[(N_1 < 154) + (N_6 = 60)] \text{ (ВГ)}.$$

3.3. Пусть оба вагонопотока N_1 и N_4 одновременно меньше критических значений: $N_1 < 154$ и $N_4 < 300$. Вероятность этого события, – вероятность $P(A_4)$ получения варианта 4 плана формирования поездов равна:

$$P(A_4) = P[(N_1 < 154) \cdot (N_4 < 300)] = P(N_1 < 154) \cdot$$

$$\cdot P(N_4 < 300) = 0{,}4483 \cdot 0{,}1539 = 0{,}069.$$

4. **Выводы**:

4.1. Установлены всевозможные варианты плана формирования поездов, соответствующие следующим случайным событиям и вероятностям их наблюдения:

$$\text{Вариант 1} \Leftrightarrow A_1 = (N_1 \geq 154)\cdot(N_4 \geq 300),\ P(A_1) = 0{,}4668.$$

$$\text{Вариант 2} \Leftrightarrow A_2 = (N_1 \geq 154)\cdot(\ N_4 < 300),\ P(A_2) = 0{,}0849.$$

$$\text{Вариант 3} \Leftrightarrow A_3 = (N_1 < 154)\cdot(N_4 \geq 300),\ P(A_3) = 0{,}3793.$$

$$\text{Вариант 4} \Leftrightarrow A_4 = (N_1 < 154)\cdot(\ N_4 < 300),\ P(A_4) = 0{,}069.$$

События A_1, A_2, A_3, A_4 являются несовместными и составляют полную систему событий. На основании теоремы о вероятности суммы событий , составляющих полную систему при суммировании вероятностей событий A_1, A_2, A_3, A_4 должны получить 1:

$$P(A_1 + A_2 + A_3 + A_4) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) + P(A_4) =$$

$$= 0{,}4668 + 0{,}0849 + 0{,}3793 + 0{,}069 = 1{,}0000.$$

Полученный результат свидетельствует о правильности выполненного вероятностного анализа плана формирования поездов в соответствии с исходными данными примера.

4.2. Из всех четырех вариантов плана формирования поездов вариант 1 имеет наибольшую вероятность $P(A_1) = 0{,}4668$. Это означает, что вариант 1 является оптимальным для организации вагонопотоков на полигоне АГ.

4.3. Общее число вариантов плана формирования поездов равно числу событий, определяемых с помощью критических значений вагонопотоков и составляющих полную систему событий, сумма вероятностей которых равна 1. Исходные данные примера предопределили 4 варианта плана формирования поездов.

5. Вариант 4, соответствующий событию A_4, возможен в любом из двух случаев:

1) $B = N_1 + N_4 < 300$, что вызывает необходимость расмотрения варианта 4*а* плана формирования поездов без какого-либо одного сквозного назначения,

2) $\overline{B} = N_1 + N_4 \geq 300$, тогда появляется необходимость рассмотрения варианта 4*b* плана формирования поездов, в котором будет иметь место одно сквозное назначение БГ.

5.1. Представление варианта 4 в виде двух вариантов дает основание и позволяет в соответствии с законами алгебры событий выразить событие A_4 в виде суммы двух несовместных событий A_5 и A_6:

$$A_4 = A_5 + A_6,$$

где $A_4 = (N_1 < 154)\cdot(N_4 < 300)$, $A_5 = (N_1 < 154,\ N_4 < 300,$

$$N_1 + N_4 < 300),\ A_6 = (N_1 < 154,\ N_4 < 300,\ N_1 + N_4 \geq 300).$$

Таким образом, вариант A_4 представляется одним из вариантов, безразлично каким, либо вариантом 4*a* (событие A_5), либо вариантом 4*b* (событие A_6). При этом A_5 есть условное событие A_4, рассматриваемое при условии $B = N_1 + N_4 < 300$, т.е. $A_5 = {}_{B}(A_4)$. Аналогично, $A_6 = {}_{\overline{B}}(A_4)$, где $\overline{B} = N_1 + N_4 \geq 300$.

Используя теорему о вероятности суммы несовместных событий, получим:

$$P(A_4) = P(A_5 + A_6) = P(A_5) + P(A_6) = P_B(A_4) + P_{\overline{B}}(A_4),$$

где $P(A_5) = P_B(A_4)$, $P(A_6) = P_{\overline{B}}(A_4)$.

5.2. Вероятность $P(A_4) = 0{,}069$. Однако, при критических значениях вагонопотоков N_1 и N_4, отличающихся от $N_1 = 154$ и $N_4 = 300$ и при других параметрах $M(N_1)$, $\sigma(N_1)$, $M(N_4)$, $\sigma(N_4)$, а также при иных законах распределения вероятностей случайных величин N_1 и N_4, вероятность $P(A_4)$ может оказаться значительно больше, чем $P(A_4) = 0{,}069$. И тогда появится необходимость определить вероятности $P(A_5)$ и $P(A_6)$.

6. Рассмотрим вариант 4*a* и определим вероятность $P(A_5) = P_B(A_4)$ его получения.

В силу невыполнения условия (5) при A_5 = $(N_1 < 154$, $N_4 < 300, N_1 + N_4 < 300)$ вариант 4*a* не имеет ни одного сквозного назначения, его график представлен на рис. 1:

$$\left[\left(N_1 < 154\right) + \left(N_2 = 40\right) + (N_3 = 50)\right](\text{АБ}), [(N_1 < 154) +$$
$$+ (N_2 = 40) + (N_4 < 300) + (N_5 = 30)](\text{БВ}),$$

$$\left[\left(N_1 < 154\right) + \left(N_4 < 300\right) + (N_6 = 60)\right](\text{ВГ}).$$

Двумерная случайная величина (N_1, N_4) описывается двумерным нормальным распределением, удовлетворяющим не обходимому и достаточному условию независимости случайных величин N_1 и N_4. Вероятностную математическую модель события $A_5 =_{\text{В}}(A_4)$ представим вероятностью попадания двумерной случайной точки (N_1, N_4) в часть области плоскости ($0 \le N_1 \le 154$, $0 \le N_4 \le 300$), ограниченную осями координат ON_1 и ON_4 и прямой $N_1 + N_4 = 300$ в поле трапеции Oaa_1b_1 (рис. 2) [3]. Очевидно, что при этом выполняются условия получения варианта 4*a*: $N_1 < 154$, $N_4 < 300$, $N_1 + N_4 < 300$.

Условия получения варианта 4*b*, а именно, $N_1 < 154$, $N_4 < 300$, $N_1 + N_4 \ge 300$ будут выполнены, если точка (N_1, N_4) попадает в поле треугольника aa_2a_1.

Вероятностная математическая модель события $A_5 =_{\text{В}}(A_4)$ предполагает следующий порядок определения вероятности $P(A_5) = P_{\text{В}}(A_4)$ [Доп. 2].

6.1. Трапецию Oaa_1b_1 разобьем на ряд частичных трапеций; чем больше их число, тем точнее будет результат; с целью сокращения объема расчетной работы ограничимся всего лишь тремя частичными трапециями $S_1 = (Oaa_3b_3)$, $S_2 = (b_3a_3a_4b_2)$, $S_3 = (b_2a_4a_1b_1)$.

6.2. Частичные трапеции заменим равными по площади прямоугольниками $S_1' = (Oa_5a_6b_3)$, $S_2' = (b_3a_7a_8b_2)$, $S_3' = (b_2a_9a_{10}b_1)$, что дает основание считать, что и вероятности попадания точки (N_1, N_4) в фигуры трапеций и прямоугольников, равных по площади, также равны.

Равенство вероятностей попадания точки (N_1, N_4) в фигуру трапеции и прямоугольника является приближенным в силу «выхода» фигуры прямоугольника в область $(N_1, N_4) \in (N_1 < 154$, $N_4 < 300$, $N_1 + N_4 \geq 300)$. В связи с этим рекомендуется разбить отрезок $[0; b_1]$ на оси О N_1 не на три, как показано на рис. 2, а на большее число частичных отрезков.

6.3. Используем выражение для определения вероятности Р попадания точки (N_1, N_4) в прямоугольную область $(x_1 \leq N_1 \leq x_2, y_1 \leq N_4 \leq y_2)$:

$$P[(N_1, N_4) \in (x_1 \leq N_1 \leq x_2, y_1 \leq N_4 \leq y_2)] =$$

$$\left[\Phi\left(\frac{x_2 - M(N_1)}{\sigma(N_1)}\right) - \Phi\left(\frac{x_1 - M(N_1)}{\sigma(N_1)}\right)\right] \cdot \left[\Phi\left(\frac{y_2 - M(N_4)}{\sigma(N_4)}\right) - \Phi\left(\frac{y_1 - M(N_4)}{\sigma(N_4)}\right)\right], \tag{10}$$

где N_1 и N_4 – нормально распределенные случайные величины, $\Phi(x)$ – функция распределения стандартной нормальной случайной величины $N(x, 0; 1)$ (функция Лапласа).

При выполнении расчетов:

1) используется таблица значений функции Лапласа $\Phi(x)$, приведенная в приложении 3,
2) необходимо иметь ввиду свойство функции $\Phi(x)$:

$$\Phi(-x) = 1 - \Phi(x),$$

3) функцию Лапласа $\Phi(x)$ можно заменить нормированной функцией Лапласа $\Phi_0(x)$

$$\Phi_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \Phi(x) - 0,5,$$

таблица значений которой приводится в приложении 2.

Например:

$$\Phi\left(\frac{x_2 - M\left(N_1\right)}{\sigma\left(N_1\right)}\right) - \Phi\left(\frac{x_1 - M\left(N_1\right)}{\sigma\left(N_1\right)}\right) =$$

$$= \Phi_0\left(\frac{x_2 - M\left(N_1\right)}{\sigma\left(N_1\right)}\right) - \Phi_0\left(\frac{x_1 - M\left(N_1\right)}{\sigma\left(N_1\right)}\right).$$

Однако, при этом надо иметь ввиду свойство нечетности функции $\Phi_0\left(x\right)$ т.е. $\Phi_0\left(-x\right) = -\Phi_0\left(x\right)$.

6.4 С помощью выражения (10) определяем вероятности попадания случайной точки $\left(N_1, N_4\right)$ в поле прямоугольников S'_1, S'_2, S'_3.

$$P\left[\left(N_1, N_4\right) \in S'_1\right] = \left[\Phi\left(\frac{b_3 - M\left(N_1\right)}{\sigma\left(N_1\right)}\right) - \Phi\left(\frac{0 - M\left(N_1\right)}{\sigma\left(N_1\right)}\right)\right] \cdot$$

$$\cdot\left[\Phi\left(\frac{a_5 - M\left(N_4\right)}{\sigma\left(N_4\right)}\right) - \Phi\left(\frac{0 - M\left(N_4\right)}{\sigma\left(N_4\right)}\right)\right] =$$

$$= \left[\Phi\left(\frac{50-160}{46}\right) - \Phi\left(\frac{0-160}{46}\right)\right] \cdot \left[\Phi\left(\frac{275-400}{98}\right) - \Phi\left(\frac{0-400}{98}\right)\right] =$$

$$= \left[\Phi\left(-2,39\right) - \Phi\left(-3,48\right)\right] \cdot \left[\Phi(-1,28) - \Phi\left(-4,08\right)\right] =$$

$$= \left(0,0082 - 0,0002\right) \cdot \left(0,1003 - 0\right) = 0,0008.$$

$$P\left[\left(N_1, N_4\right) \in S'_2\right] = \left[\Phi\left(\frac{b_2 - M\left(N_1\right)}{\sigma\left(N_1\right)}\right) - \Phi\left(\frac{b_3 - M\left(N_1\right)}{\sigma\left(N_1\right)}\right)\right] \cdot$$

$$\cdot\left[\Phi\left(\frac{a_7 - M\left(N_4\right)}{\sigma\left(N_4\right)}\right) - \Phi\left(\frac{0 - M\left(N_4\right)}{\sigma\left(N_4\right)}\right)\right] =$$

$$= \left[\Phi\left(\frac{100-160}{46}\right) - \Phi\left(\frac{50-160}{46}\right)\right] \cdot \left[\Phi\left(\frac{225-400}{98}\right) - \Phi\left(\frac{0-400}{98}\right)\right] =$$

$$= \left[\Phi\left(-1,3\right) - \Phi\left(-2,39\right)\right] \cdot \left[\Phi\left(-1,79\right) - \Phi\left(-4,08\right)\right] =$$

$$= \left(0,0968 - 0,0082\right) \cdot \left(0,0367 - 0\right) = 0,0033.$$

$$P\left[\left(N_1, N_4\right) \in S_3'\right] = \left[\Phi\left(\frac{b_1 - M\left(N_1\right)}{\sigma\left(N_1\right)}\right) - \Phi\left(\frac{b_2 - M\left(N_1\right)}{\sigma\left(N_1\right)}\right)\right] \cdot$$

$$\cdot \left[\Phi\left(\frac{a_9 - M\left(N_4\right)}{\sigma\left(N_4\right)}\right) - \Phi\left(\frac{0 - M\left(N_4\right)}{\sigma\left(N_4\right)}\right)\right] =$$

$$= \left[\Phi\left(\frac{154-160}{46}\right) - \Phi\left(\frac{100-160}{46}\right)\right] \cdot \left[\Phi\left(\frac{173-400}{98}\right) - \Phi\left(\frac{0-400}{98}\right)\right] =$$

$$= \left[\Phi\left(-0{,}13\right) - \Phi\left(-1{,}3\right)\right] \cdot \left[\Phi\left(-2{,}32\right) - \Phi\left(-4{,}08\right)\right] =$$

$$= \left(0{,}4483 - 0{,}0968\right) \cdot \left(0{,}0102 - 0\right) = 0{,}0036.$$

6.5. Вероятность $P(A_5) = P_{\text{В}}(A_4)$ определяется суммой:

$$P(A_5) = \sum_{i=1}^{3} P\left[\left(N_1, N_4\right) \in S_i'\right] = 0{,}0008 + 0{,}0033 + 0{,}0036 = 0{,}0077.$$

7. Рассмотрим вариант 4b и определим вероятность $P(A_6) = P_{\overline{\text{В}}}(A_4)$ его получения.

Случайному событию $A_4 = (N_1 < 154,\ N_4 < 300)$ соответствует попадание двумерной случайной точки (N_1, N_4) в поле прямоугольника (Oaa_2b_1) (рис. 2) с вероятностью:

$$P\left(A_4\right) = P\left(0 < N_1 < 154\right) \cdot P\left(0 < N_4 < 300\right) =$$

$$= \left[\Phi_0\left(\frac{154-160}{46}\right) - \Phi_0\left(\frac{0-160}{46}\right)\right] \cdot \left[\Phi\left(\frac{300-400}{98}\right) - \Phi_0\left(\frac{0-400}{98}\right)\right] =$$

$$= \left[\Phi_0\left(-0{,}13\right) - \Phi_0(-3{,}48)\right] \cdot \left[\Phi_0\left(-1{,}02\right) - \Phi_0\left(-4{,}08\right)\right] =$$

$$= \left[-\Phi_0\left(0{,}13\right) + \Phi_0\left(3{,}48\right)\right] \cdot \left[-\Phi_0\left(1{,}02\right) + \Phi_0\left(4{,}08\right)\right] =$$

$$= (-0{,}05172 + 0{,}49977) \cdot \left(-0{,}34614 + 0{,}49997\right) = 0{,}069.$$

Поскольку $A_4 = {}_{\text{В}}(A_4) + {}_{\overline{\text{В}}}(A_4)$, где ${}_{\text{В}}(A_4)$ и ${}_{\overline{\text{В}}}(A_4)$ несовместные события, то по теореме о вероятности суммы несовместных событий имеем

$$P(A_4)=P_{\text{В}}(A_4)+P_{\overline{\text{В}}}(A_4).$$

Откуда

$$P_{\overline{\text{В}}}(A_4)=P(A_4)-P_{\text{В}}(A_4)=0{,}069-0{,}0077=0{,}0613.$$

Таким образом, вероятность получения варианта 4*b*, при котором

$$P_{\text{В}}(A_4)=(N_1<154,\ N_4<300,\ N_1+N_4\geq 300),$$

равна

$$P(A_6)=P_{\overline{\text{В}}}(A_4)=0{,}061.$$

В варианте 4*b* имеем $N_1+N_4\geq 300$, что соответствует необходимому условию (5) выделения вагонопотока в струю сквозного назначения. Вариант 4*b* плана формирования поездов представлен на рис.1:

$$[(N_1<154)+(N_2=40)+(N_3=50)](\text{АБ}),$$
$$[(N_2=40)+(N_5=30)](\text{БВ}),$$
$$[(N_1<154)+(N_4<300)](\text{БГ}),\ \ N_6=60(\text{ВГ}).$$

3. Описание случайного характера суточных объемов вагонопотоков законами распределения вероятностей, отличными от нормального

В задании на контрольную работу для описания случайного объема вагонопотоков N_1 и N_4, кроме нормального закона, указаны также другие законы распределения вероятностей: Эрланга 4-го (Э4), 3-го (Э3), 2-го (Э2) порядков, показательный (П) и равномерный (Р).

В приведенном примере расчет вероятностей в выражениях (9), (10) рассмотрен в предположении нормального закона распределения. При других законах расчет вероятностей тех же событий выполняется в соответствии с иной последовательностью действий.

3.1. Распределение Пуассона

Предположим, что по схеме независимых испытаний Бернулли производится некоторый опыт, состоящий из большого числа n испытаний. Пусть в каждом испытании некоторое случайное событие A наблюдается с малой вероятностью p и, следовательно, в результате опыта – небольшое число k раз. Например, при транспортировке $n = 1000$ хрустальных ваз событие A – разрушение хрустальной вазы под воздействием неучтенных условий транспортировки наблюдается с вероятностью $p = 0{,}001$ и $k = 1,2,3, \ldots$ раз. При этом событие A называется *редким случайным событием*, а величина k является дискретной случайной величиной $\{X = k\}$, описываемой законом распределения вероятностей Пуассона:

$$P\{X = k\} = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, \quad k = 0,1,2,3, \ldots \qquad (11)$$

где $\lambda > 0$ – *параметр закона Пуассона*, $\lambda = M(X) = D(X)$, $M(X)$ – математическое ожидание, $D(X)$ – дисперсия случайной величины $\{X = k\}$.

В независимых испытаниях математическое ожидание числа появлений A равно $M(X) = np$, а $D(X) = np\,(1 - p)$ [3], [4], [Доп. 4]. При p малом имеет место приближенное равенство $np \approx np(1-p)$, а значит возможно допущение о том, что $\lambda \approx np$. В приведенном примере вычислим вероятность того, что в результате транспортировки разрушится, предположим, только 2 вазы. По формуле (11) имеем:

$$P(X=2)=\frac{(1000\cdot 0{,}001)^2}{2!}e^{-(1000\cdot 0{,}001)}=0{,}1839.$$

Это означает, что при многократной транспортировке ваз по 1000 штук примерно в 20% от всего количества транспортировок будет разрушаться только 2 вазы. Для выполнения вычислений по формуле (11) используем таблицу значений $P\{X = k\}$, получаемых в соответствии с законом распределения Пуассона (прил. 4).

Рассмотрим поток случайных событий, наблюдаемых в случайные моменты времени, например, прибываемые или отправляемые с сортировочной станции поезда (рис. 3).

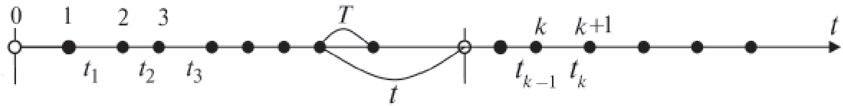


Рис. 3. Поток случайных событий

Если последовательности случайных событий присущи вероятностные свойства: *стационарность, отсутствие последействия и ординарность*, то поток случайных событий называется *простейшим* или *стационарным пуассоновским*.

Стационарность потока: среднее число событий, наблюдаемых за единицу времени, не меняется во времени.

Отсутствие последействия в потоке: события, образующие поток, появляются независимо один от другого; вероятность наблюдения любого числа событий на любом промежутке времени не зависит от числа событий, предшествующих этому промежутку.

Ординарность потока: два или более случайных события в потоке не могут произойти на малом промежутке времени, вероятность их наблюдения на этом промежутке пренебрежимо мала по сравнению с вероятностью одного события.

Как в любой математической модели, так и в модели, описывающей поток случайных событий, свойства являются упрощенными (идеализированными), что позволяет придать модели определенную математическую форму.

В стационарном пуассоновском потоке выполняются все условия схемы независимых испытаний, при которых наблюдаемая дискретная случайная величина $\{X = k\}$ описывается законом распределения вероятностей Пуассона: бесчисленное множество точек на оси времени соответствует требованию большого числа испытаний n, относительно которого любое конечное число событий является небольшим числом, откуда следует выполнение условия малой вероятности P наблюдения случайного события в каждом испытании.

Число событий, наблюдаемых в стационарном пуассоновском потоке за время t, является случайной величиной, описываемой законом распределения вероятностей Пуассона:

$$P_k(t) = \frac{(\lambda_0 t)^k}{k!} e^{-\lambda_0 t}, \quad k = 0, 1, 2, ..., \tag{12}$$

где $P_k(t)$ – вероятность наблюдения k событий за время t;

λ_0 – среднее число событий, наблюдаемых за единицу времени, называется *интенсивностью потока случайных событий*;

$\lambda_0 t$ – среднее число событий, наблюдаемых за время t.

Закон Пуассона (12) рассматриваем в качестве математической модели простейшего потока событий. Например, в соответствии с (12) имеем: вероятность ненаблюдения ни одного события ($k = 0$) в простейшем потоке за время t

$$P_0(t) = e^{-\lambda_0 t}, \quad k = 0,$$

вероятность наблюдения одного события

$$P_1(t) = \lambda_0 t e^{-\lambda_0 t}, \quad k = 1,$$

двух событий

$$P_2(t) = \frac{1}{2}(\lambda_0 t)^2 e^{-\lambda_0 t}, \quad k = 2 \text{ и т.д.}$$

Примерами потоков и соответствующих им случайных величин, математической моделью которых является закон Пуассона (12), могут быть поток и число: поездов, прибывающих на железнодорожную станцию, пассажиров, обращающихся в железнодорожную кассу за билетами, вызовов на телефонной станции, включений приборов в бытовой электросети, отказов (неисправностей) технического устройства, заказчиков разного рода ателье, и т.д.

Пример 1. В сортировочный парк за сутки прибывает $n = 1000$ вагонов. Вероятность прибытия неисправного вагона $p = 0{,}004$. *Найти*: 1) вероятность того, что понадобится ремонтировать 10 вагонов, 2) интенсивность прибытия неисправных вагонов в течение 1 часа.

Решение. Условие задачи допускает рассматривать в качестве математической модели случайной величины – числа неисправных вагонов – формулу (11), потока неисправных вагонов – формулу (12). При этом необходимо иметь ввиду, что среднее число неисправных вагонов, прибывающих за сутки $\lambda = np$ (по формуле (11)) или $\lambda_0 t$ (по формуле (12)), следовательно:

$$\lambda = np = \lambda_0 t,$$

где t – сутки (24 часа), λ_0 – среднее число неисправных вагонов, прибывающих в течение 1 часа (интенсивность потока неисправных вагонов).

1. Вероятность того, что понадобится ремонтировать 10 вагонов, определяем по формуле (11):

$$P\left(X=10\right)=\frac{\left(1000\cdot 0,001\right)^{10}}{10!}e^{-\left(1000\cdot 0,001\right)}=0,0053.$$

Вычисление выполняем с помощью таблицы значений $P\{X=k\}$ при $k=10$, $\lambda=4$ (прил. 4).

2. Интенсивность прибытия неисправных вагонов в течение 1 часа

$$\lambda_0=\frac{np}{t}=\frac{1000\cdot 0,004}{24}=0,1667.$$

Пример 2. В сортировочный парк прибывают поезда с интенсивностью $\lambda_0 = 3$ поезда в час. В парке имеется 4 пути, прием поезда без задержки возможен только на свободный путь. В парке поезд простаивает не более $t_{\text{пр}} = 45$ мин. Поток прибывающих поездов является стационарным пуассоновским. Найти вероятность приема поезда без задержки.

Решение. Очевидно, что задержки поезда не будет, если в течение 45 мин прибудет не более $k = 4$ поездов. События, состоящие в том, что в течение 45 мин прибудет только 4 поезда – A_4, либо только 3 поезда – A_3, либо только 2 поезда – A_2, либо только 1 поезд – A_1, либо не прибудет ни один поезд, что равносильно прибытию 0 поездов – A_0, являются несовместными. Поэтому интересующая нас вероятность $P(k \le 4)$ определяется по теореме сложения вероятностей несовместных событий с помощью математической модели (12) потока прибывающих поездов:

$$P(k \le 4) = P(A_0 + A_1 + A_2 + A_3 + A_4) = P(A_0) + P(A_1) + P(A_2) +$$

$$+ P(A_3) + P(A_4) = \sum_{k=0}^{k=4}\frac{\left(\lambda_0 t_{np}\right)^k}{k!}e^{-\lambda_0 t_{np}} = \frac{\left(2,25\right)^0}{0!}e^{-2,25} + \frac{\left(2,25\right)^1}{1!}e^{-2,25} +$$

$$+ \frac{\left(2,25\right)^2}{2!}e^{-2,25} + \frac{\left(2,25\right)^3}{3!}e^{-2,25} + \frac{\left(2,25\right)^4}{4!}e^{-2,25} =$$

$$= 0,1139 + 0,2404 + 0,2590 + 0,1913 + 0,1097 = 0,9143.$$

Вычисления выполнены с помощью таблицы значений $P\{X = k\}$ при $k = 0 \div 4$, $\lambda = 2{,}25$ (прил. 4).

3.2. Показательное (экспоненциальное) распределение

Рассмотрим непрерывную случайную величину T – время между двумя любыми соседними событиями в простейшем потоке событий на оси времени Ot и получим *закон распределения ее вероятностей* в виде функции распределения вероятностей, определяющей вероятность того, что величина Т примет значение, меньшее, чем t (см. рис. 3):

$$F(t) = P(T < t). \tag{13}$$

Предполагаем, что на промежутке t наблюдаем хотя бы одно событие потока.

Хотя одно событие потока на промежутке t является случайным событием, вероятность которого определим через вероятность противоположного ему события:

$$F(t) = 1 - P_0(t), \tag{14}$$

где $P_0(t)$ – вероятность противоположного события: на промежутке t не наблюдаем ни одного события потока.

Вероятность $P_0(t)$ находим по формуле (12)

$$P_0(t) = \frac{(\lambda_0\, t)^0}{0!} e^{-\lambda_0 t} = e^{-\lambda_0 t}. \tag{15}$$

Подставим (15) в (14), получим функцию показательного (экспоненциального) распределения вероятностей величины T:

$$F(t) = 1 - e^{-\lambda_0 t},\ t \geq 0. \tag{16}$$

Продифференцируем (16), получим плотность $f(t)$ распределения вероятностей случайной величины T:

$$f(t) = \lambda_0 e^{-\lambda_0 t}, \quad t \geq 0. \tag{17}$$

Случайная величина T, описываемая законом распределения вероятностей в виде функций $F(t)$ (16) и $f(t)$ (17), называется *показательной (экспоненциальной)*, а ее закон распределения (16), (17) – *показательным (экспоненциальным)* с параметром λ_0 [3], [Доп. 4].

Показательный закон распределения вероятностей случайной величины T является аналогом закона Пуассона для непрерывной случайной величины T. Числовые характеристики случайной величины T равны [3]:

математическое ожидание

$$M(T) = \int_0^{\infty} f(t)\ dt = \lambda_0 \int_0^{\infty} te^{-\lambda_0 t} dt = \frac{1}{\lambda_0} \tag{18}$$

дисперсия

$$D(T) = \int_0^{\infty} t^2 f(t)\ dt - M^2(T) = \int_0^{\infty} t^2 \lambda_0 e^{-\lambda_0 t} dt - \frac{1}{\lambda_0^2} = \frac{1}{\lambda_0^2}, \tag{19}$$

среднее квадратическое отклонение

$$\sigma(T) = \sqrt{D(T)} = \frac{1}{\lambda_0}. \tag{20}$$

Из (18) и (20) видно, что математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение случайной величины T равны. Это равенство дает основание утверждать и обратное: в тех случаях, когда математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение некоторой случайной величины X равны, то случайная величина X может быть описана показательным законом распределения вероятностей.

Зная функцию $F(t)$ (13), находим вероятность $P(T < t)$; используя теорему о сумме вероятностей противоположных событий, находим вероятность противоположного события:

$$P(T \geq t) = 1 - F(t). \tag{21}$$

Поэтому на основании (16) и (21) для закона показательного распределения вероятностей случайной величины T получим:

$$P(T \geq t) = e^{-\lambda_0 t}. \tag{22}$$

Чтобы найти вероятность $P(t_1 < T < t_2)$ события, состоявшего в том, что случайная величина Т, описываемая показательным законом распределения вероятностей (16), (17), наблюдается на интервале значений от t_1 до t_2, воспользуемся свойством функции распределения вероятностей

$$P(t_1 < T < t_2) = F(t_2) - F(t_1). \tag{23}$$

Подставляем (16) в (23), получаем

$$P(t_1 < T < t_2) = e^{-\lambda_0 t_1}[1 - e^{-\lambda_0 (t_2 - t_1)}]. \tag{24}$$

Показательным распределением описываются случайные величины в многочисленных задачах железнодорожного транспорта, электротехники, радиосвязи, в теориях надежности, массового обслуживания, случайных процессов, например, время между прибытием поездов на сортировочные станции и отправлениями поездов со станций, время расформирования и формирования поездов, осмотра поездов бригадами техобслуживания, время ожидания в очереди, длительность телефонного разговора, время безотказной работы технического устройства и др.

Пример 3. Событие: прибытие поезда на сортировочную станцию — случайное, поток этих событий – простейший, время между двумя последовательными прибытиями поездов – случайная величина T, описываемая показательным законом распределения вероятностей. Среднее число λ_0 поездов, прибывающих на станцию за 1 ч, равно 3. Найти вероятность $P(T < t)$ того что время T между прибытием двух поездов не больше $t = 30$ мин.

Решение. Показательный закон распределения вероятностей, описывающий случайную величину T, имеет вид (формула 16):

$$F(t) = P(T < t) = 1 - e^{-\lambda_0 t}.$$

Для условия задачи получаем искомую вероятность:

$$F(0{,}5) = P(T < 0{,}5) = 1 - e^{-\lambda_0 t} = 1 - 0{,}2231 = 0{,}7769.$$

Вычисление выполняем с помощью таблицы значений показательной функции $y = e^{-x}$ (прил. 5).

Пример 4. Данные исследования подтверждают, что поток отказов технического устройства удовлетворяет всем условиям, чтобы считать его простейшим. Техническое устройство за 1000 часов работы выходит из строя (отказывает) в среднем 20 раз.

Найти: 1) математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение рабочего периода (времени между последовательными отказами) технического устройства. 2) вероятность отказа за 100 часов работы.

Решение. 1. Пусть случайная величина T – рабочий период. Тогда при простейшем потоке отказов случайная величина T описывается показательным законом распределения вероятностей (формула 16);

$$F(t) = P(T < t) = 1 - e^{-\lambda_0 t},$$

где по данным примера интенсивность λ_0 отказа за 1 час (среднее число отказов за единицу времени 1 час) равна

$$\lambda_0 = \frac{20}{1000} = 0{,}02\left(\frac{\text{отказов}}{\text{час}}\right).$$

Математическое ожидание $M(T)$ и среднее квадратическое отклонение σ (T) случайной величины T находим по формулам (18) и (20):

$$M(T) = \sigma(T) = \frac{1}{\lambda_0} = \frac{1}{0{,}02} = 50\left(\frac{\text{часов}}{\text{отказ}}\right).$$

Таким образом, техническое устройство в среднем работает 50 часов до отказа. Эта величина называется *наработкой на отказ*.

2. Вероятность отказа технического устройства за 100 часов работы находим по формуле (16):

$$F(100) = P(T < 100) = 1 - e^{-0,02 \cdot 100} = 1 - e^{-2} = 1 - 0,1353 = 0,8647$$

(прил. 5).

Выводы: 1) события « отказ за 100 часов работы » и « безотказность за 100 часов работы» являются противоположными, поэтому вероятность безотказной работы технического устройства за 100 часов работы равна 0,1353; 2) в общем случае показательного закона распределения случайной величины T – времени между двумя последовательными отказами вероятность безотказной работы технического устройства за время t находим по формуле

$$P(T \geq t) = 1 - P(T < t) = 1 - F(t) = e^{-\lambda_0 t}. \qquad (25)$$

Обозначая $P(T \geq t) = P_{\text{н}}(t)$, получаем

$$P_{\text{н}}(t) = e^{-\lambda_0 t}. \qquad (26)$$

Выражение (26) позволяет определить вероятность того, что техническое устройство, работающее в момент t_0, не откажет до момента $t_0 + t$.

Пример 5. Предположим, что вагонопоток N, поступающий на сортировочную станцию в течение суток, является случайной величиной, описываемой показательным законом распределения вероятностей (16). При показательном законе среднее значение случайной величины равно ее среднему квадратическому отклонению. Для вагонопотока N, таким образом, имеем $M(N) = \sigma(N)$. Найти вероятность $P(N < x)$, $P(N \geq x)$, $P(x_1 < N < x_2)$, если заданы значения $M(N) = 400$, $x = 300$, $x_1 = 200$, $x_2 = 250$.

Решение. 1. По аналогии с определением функции распределения $F(t)$ случайной величины T, $F(t) = P(T < t)$, для вагонопотока N, описываемого законом (16), имеем:

$$F(x) = P(N < x) = 1 - e^{-\lambda_0 t}, \quad x \geq 0, \qquad (27)$$

где x – действительная переменная.

По выражению (27) находим:

$$P(N < 300) = 1 - e^{-\lambda_0 \cdot 300},$$

где λ_0 — определяем согласно (18)

$$\lambda_0 = \frac{1}{M(N)} = \frac{1}{400},$$

поэтому

$$P(N < 300) = 1 - e^{-\frac{300}{400}} = 1 - e^{-0,75} = 1 - 0,4724 = 0,5276$$

(прил. 5).

2. Поскольку на основании теоремы о вероятности суммы противоположных событий

$$P(N < 300) + P(N \geq 300) = 1,$$

то $$P(N \geq 300) = 1 - P(N < 300) = 1 - 0,5276 = 0,4724 .$$

3. Вероятность $P(x_1 < N < x_2)$ находим согласно (24):

$$P(200 < N < 300) = e^{-\frac{200}{400}} \left(1 - e^{-\frac{250-200}{400}} \right) =$$

$$= 0,6065 \cdot (1 - 0,8825) = 0,0713.$$

Вывод: сравнивая вероятность $P(N < 300)$, рассчитанную в предположении распределения случайной величины N по нормальному закону (см. пример плана формирования поездов $P(N_4 < 300) = 0{,}1539$ и по показательному $P(N < 300) = 0{,}5276$ при одном и том же математическом ожидании $M(N_4) = M(N) =$ $= 400$, видим , что замена законов распределения существенно изменит искомую вероятность.

3.3. Распределение Эрланга порядка *k*

Рассмотрим в простейшем потоке событий (рис. 3) последовательность событий :

а) через одно событие:

$$1, 3, 5, 7, 9 , 11 , ... ; \tag{28}$$

б) через два события:

$$1, 4, 7, 10, 13, 16, ... ; \tag{29}$$

в) через три события:

$$1, 5, 9, 13, 17, 21, ... ; \tag{30}$$

г) и т. д. , через k событий:

$$1,\ 1+(k+1)\ ,\ 1+2(k+1)\ ,\ 1+3(k+1)\ , ... \tag{31}$$

Потоки событий (28) — (31) называются *потоками событий Эрланга порядка* $k = 2$, $k = 3$, $k = 4$, ..., k соответственно.

Введем счетчик k ($k = 1,...., k$) промежутков времени между событиями в простейшем потоке , чтобы с его помощью обозначить время между событиями i и $i+1$ через t_{i1}, между событиями $i+1$ и $i+2$ через t_{i2} и т. д., между событиями $i+(k-1)$ и $i+k$ через t_{ik} (рис. 4).

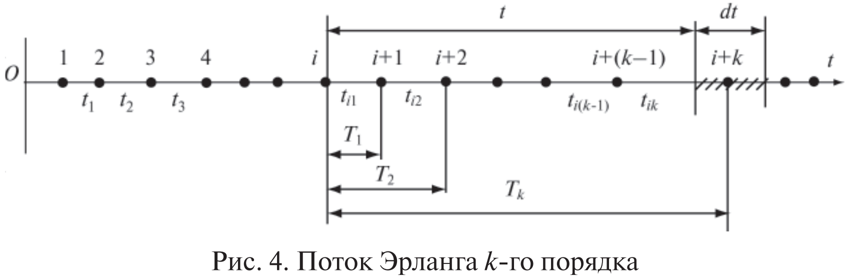


Рис. 4. Поток Эрланга k-го порядка

Используя счетчик k , просуммируем времена между событиями в простейшем потоке. Тогда получим случайные величины T_k, $k=1,....,k$, которые называются *случайными величинами подчиненными закону распределения Эрланга порядка* $k = 1, ...,$ k соответственно (*эрланговские случайные величины порядка* k) [1] , [Доп.3], [Доп.4] :

$$T_1 = t_{i1}, \tag{32}$$

$$T_2 = t_{i1} + t_{i2} = \sum_{k=1}^{k=2} t_{ik}, \tag{33}$$

$$T_3 = t_{i1} + t_{i2} + t_{i3} = \sum_{k=1}^{k=3} t_{ik}, \tag{34}$$

....

$$T_k = t_{i1} + \ldots + t_{ik} = \sum_{k=1}^{k} t_{ik}. \tag{35}$$

При $k=1$ получаем случайную величину T_1, распределенную по закону Эрланга 1-го порядка, или, что то же самое, по закону распределения времени между двумя последовательными событиями в простейшем потоке, т.е. по показательному закону (16), (17).

Закон распределения Эрланга k-го порядка представляет собой распределение случайной величины T_k, полученной в результате суммирования k независимых случайных величин , каждая из которых распределена по одному и тому же показательному закону с одним и тем же параметром λ_0 (λ_0 – интенсивность простейшего потока событий).

Найдем выражение для плотности $f_k(t)$ вероятностей случайной величины T_k (см. рис. 4). С этой целью определим вероятность $f_k(t)dt$ того, что значения непрерывной случайной величины T_k принадлежат элементарному промежутку dt (см. рис. 4). Очевидно, что для этого на промежутке t должна оказаться $k-1$ точка простейшего потока и одновременно на промежутке dt одна точка k. Вероятность $P_{k-1}(t)$ попадания $k-1$ точки на промежуток t и вероятность $P_1(dt)$ попадания одной точки на промежуток dt определим по формуле Пауссона (11), (12):

$$P_{k-1}(t)=\frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)\ !}e^{-\lambda}=\frac{(\lambda_0 t)^{k-1}}{(k-1)\ !}e^{-\lambda_0 t},$$

$$P_1(dt)=\frac{\lambda^1}{1\ !}e^{-\lambda}=\frac{(\lambda_0 dt)^1}{1\ !}e^{-\lambda_0\ dt}\simeq\lambda_0 dt.$$

На основании теоремы умножения вероятностей независимых событий получаем

$$f_k(t)dt=P_{k-1}(t)\cdot P_1(dt)=\frac{(\lambda_0 t^{k-1})}{(k-1)\ !}e^{-\lambda_0 t}\cdot\lambda_0 dt,$$

$$f_k(t)=\frac{\lambda_0(\lambda_0 t\ )^{k-1}}{(k-1)\ !}e^{-\lambda_0 t},\quad t\geq 0. \tag{36}$$

Найдем математическое ожидание $M(T_k)$, дисперсию $D(T_k)$ и среднее квадратическое отклонение случайной величины T_k применяя к (35), соответственно, теорему сложения математических ожиданий и теорему сложения дисперсий:

$$M(T_k)=\frac{k}{\lambda_0},\quad D(T_k)=\frac{k}{\lambda_0^2},\quad \sigma(T_k)=\frac{\sqrt{k}}{\lambda_0}, \tag{37}$$

где λ_0 — интенсивность (среднее число событий в единицу времени) простейшего потока.

Найдем λ_k – интенсивность (среднее число событий в единицу времени) потока Эрланга k-го порядка.

Поскольку число событий в потоке Эрланга k-го порядка уменьшится в k раз относительно простейшего потока , то

$$\lambda_k=\frac{\lambda_0}{k},\quad \lambda_0=k\lambda_k. \tag{38}$$

Из (37) и (38) видно, что $\lambda_k = \dfrac{1}{M(T_k)}$.

Подставляя (38) в (36) и (37), получим плотность $f_k(t)$ и численные характеристики закона Эрланга k-го порядка, выраженные через λ_0 :

$$f_k(t) = \frac{k\lambda_k\left(k\lambda_k t\right)^{k-1}}{(k-1)\,!}\cdot e^{-k\lambda_k t} = \frac{(k\lambda_k)^k}{(k-1)\,!}t^{k-1}e^{-k\lambda_k t},\quad t \ge 0 \qquad (39)$$

$$M(T_k) = \frac{1}{\lambda_k},\quad D(T_k) = \frac{1}{k\lambda_k^2},\quad \sigma(T_k) = \frac{1}{\sqrt{k\lambda_0}}. \qquad (40)$$

Найдем выражение для функции $F_k(t)$ распределения вероятностей случайной величины T_k:

$$F_k(t) = P(T_k < t) = \int_0^t f_k(t)dt = \frac{(k\lambda_k)^k}{(k-1)!}\int_0^t t^{k-1}e^{-k\lambda_k t}dt,\quad t \ge 0. \quad (41)$$

Случайная величина T_k, характеризуемая двумя параметрами k и λ_k и описываемая законом распределения вероятностей (39), (41) и числовыми характеристиками (40) называется *случайной величиной, распределенной по закону Эрланга k-го порядка*.

Отметим , что из (39) и (41) при k =1 получим случайную величину T_1, распределенную по закону Эрланга 1-го порядка, или, что то же самое, по показательному закону:

$$f_1(t) = \lambda_1 e^{-\lambda_1 t}\ ,$$

$$F_1(t) = \lambda_1\int_0^t e^{-\lambda_1 t}dt = -\int_0^t e^{-\lambda_1 t}d(-\lambda_1 t) = -e^{-\lambda_1 t}\Big|_0^t = 1 - e^{-\lambda_1 t}.$$

Здесь в соответствии с (38) $\lambda_1 = \lambda_0$. Функцией (41) в частных случаях k = 1÷4 удобно пользоваться в виде выражений, представленных через элементарные функции [Доп. 4]:

$$F_1(t) = 1 - e^{-\lambda_1 t}, \quad k = 1, \tag{42}$$

$$F_2(t) = 1 - (2\lambda_2 t + 1) \cdot e^{-2\lambda_2 t}, \quad k = 2, \tag{43}$$

$$F_3(t) = 1 - \frac{1}{2}(9\lambda_3^2 t^2 + 6\lambda_3 t + 2) \cdot e^{-3\lambda_3 t}, \quad k = 3, \tag{44}$$

$$F_4(t) = 1 - \frac{1}{3}(32\lambda_4^3 t + 24\lambda_4^2 t + 12\lambda_4 t + 3) \cdot e^{-4\lambda_4 t}, \quad k = 4. \tag{45}$$

Выводы: 1. При $k \geq 4$ график плотности $f_k(t)$ становиться симметричным относительно математического ожидания $M(T_k) = \dfrac{1}{\lambda_k}$ и подобным графику плотности нормального распределения случайной величины X. Отсюда следует, что нормальную случайную величину $X = T_k$, для которой в соответствии с (40)

$$k = \frac{\left[M(X)\right]^2}{D(X)} \geq 4, \tag{46}$$

можно описать законом распределения Эрланга порядка $k \geq 4$.

2. Если рассмотреть законы распределения Эрланга различного порядка k, но принять равное для всех законов одно и то же некоторое значение математического ожидания $M(T_k) = C$, то можно изучить влияние порядка к на эрланговский поток событий.

Из (40) видно, что дисперсия $D(T_k) \to 0$ при $k \to \infty$. Это означает, что при увеличении порядка k поток Эрланга от простейшего потока с отсутствием последействия по мере увеличения k переходит к регулярному потоку с жесткой функциональной связью между промежутками наблюдаемых событий с постоянным интервалом между ними $M(T_k) = C = \dfrac{1}{\lambda_k}$. Таким образом, порядок k эрланговского потока событий выполняет роль «меры последействия», что позволяет некоторый реальный поток событий описать распределением Эрланга порядка k. Для этого необходимо, чтобы математическое ожидание и дисперсия времени между событиями реального потока были соответственно равными математическому ожиданию и дисперсии потока Эрланга, устанавливаемыми в соответствии с (40).

В заключение отметим, что в практике эксплуатации железных дорог закону распределения Эрланга порядка k подчиняются многочисленные случайные величины, например, интервалы времени между прибытием поездов на сортировочную станцию, отправлением поездов со станции, время расформирования и формирования поездов, время осмотра поездов бригадами технического обслуживания.

Пример 6. Рассмотрим некоторый поток случайных событий, в котором время T между событиями, как случайная величина, имеет две числовые характеристики: среднее значение $\overline{T} = 5$ мин, среднее квадратическое отклонение $\sigma(T) = 3$ мин. Описать данный поток распределением Эрланга.

Решение. Чтобы выполнить требуемое описание, необходимо подобрать такой поток Эрланга, в котором время между событиями будет иметь характеристики, равные характеристикам времени в данном потоке, а закон распределения этого времени будет законом распределения Эрланга с параметрами λ_k (интенсивность потока – среднее число событий в единицу времени) и k (порядок закона). В соответствии с (40) находим

$$\lambda_k = \frac{1}{\overline{T}} = \frac{1}{5} = 0,2 \ \left(\frac{\text{соб.}}{\text{мин}}\right),$$

$$k = \frac{1}{\sigma^2(T)\lambda_k^2} = \frac{1}{3^2 \cdot 0,2^2} = 2,(7).$$

Поскольку порядок k закона Эрланга является целым числом, то примем $k = 3$.

Искомое распределение Эрланга, представленное плотностью распределения с параметрами $\lambda_k = 0,2$, $k = 3$, запишем по выражению (39):

$$f_3(t)=\frac{(3\cdot 0,2)^3}{(3-1)\ !}\cdot t^{3-1}e^{-3\cdot 0,2\cdot t}=0,108t^2\cdot e^{-0,6t},\quad t\geq 0.$$

Пример 7. Время T расформирования состава с горки случайная величина, подчиненная закона распределения Эрланга порядка $k = 3$, среднее значение времени расформирования $\overline{T}$ =10 мин. Найти вероятность P того, что время T: 1) будет меньше $t = 10$ мин, 2) попадает в интервал между $t_1 = 8$ мин и $t_2 = 12$ мин.

Решение. Вычисление вероятностей выполняем с помощью функции распределения по формуле (44):

1) $\lambda_3=\frac{1}{\overline{T}}=\frac{1}{10}=0,1\left(\frac{\text{соб.}}{\text{мин}}\right)$ по формуле (40),

$$P(T<t)=F_3(t)=1-\frac{1}{2}(9\lambda_3^2t^2+6\lambda_3\ t+2)\ e^{-3\lambda_3 t},$$

$$P(T<10)=F_3(t)=$$

$$=1-\frac{1}{2}\left(9\cdot 0,1^2\cdot 10^2+6\cdot 0,1\cdot 10+2\right)e^{-3\cdot 0,1\cdot 10}=$$

$$=0,5768,$$

,

2) $P(t_1<T<t_{\leq})=P(T<t_2)-P(T<t_1)=F_3(t_2)-F_3(t_1)=$

$$=\left[1-\frac{1}{2}(9\cdot 0,1^2\cdot 12^2+6\cdot 0,1\cdot 12+2)e^{-3\cdot 0,1\cdot 10}\right]-$$

$$-\left[1-\frac{1}{2}(9\cdot 0.1^2\cdot 8^2+6\cdot 0,1\cdot 8+2)e^{-3\cdot 0,1\cdot 8}\right]=0,267.$$

При вычислениях использована таблица значений показательной функции (прил. 5).

Пример 8. Решить пример 5 (см. показательное распределение) предполагая, что вагонопоток N описывается законом распределения Эрланга порядка $k = 2$.

Решение. 1. По аналогии с определением функции распределения $F(t)$ случайной величины T, $F(t) = P(T < t)$, для вагонопотока N, описываемого законом распределения Эрланга порядка $k = 2$ (43), имеем:

$$F_2(x) = P\left(N < x\right) = 1 - (2\lambda_2 t + 1)\ e^{-2\lambda_2 t}, \quad x \geq 0.$$

Отсюда

$$P\ \left(N < N_{\text{кр}}\right) = 1 - \left(2\lambda_2 N_{\text{кр}} + 1\right) e^{-2\ \lambda_2 N_{\text{кр}}},$$

где λ_2 определяем по (40)

$$\lambda_2 = \frac{1}{M\left(N\right)} = \frac{1}{400},$$

поэтому

$$P\left(N < 300\right) = 1 - \left(2 \cdot \frac{1}{400} \cdot 300 + 1\right) \cdot e^{-2 \cdot \frac{1}{400} \cdot 300} = 0,4922.$$

2. Поскольку

$$P(N < 300) + P(N \geq 300) = 1,$$

то

$$P\left(N \geq 300\right) = 1 - P\left(N < 300\right) = 1 - 0,4922 = 0,5578.$$

3. Находим вероятность $P(x_1 < N < x_2)$:

$$P\ (x_1 < N < x_2) = F_2\left(x_2\right) - F_2\left(x_1\right),$$

$$P\left(N_1 < N < N_2\right) = F_2\left(N_2\right) - F_2\left(N_1\right) = \left[1 - \left(\lambda_2 N_2 + 1\right) e^{-2\lambda_2 N_2}\right] -$$

$$-\left[1 - \left(\lambda_2 N_1 + 1\right) e^{-2\lambda_2 N_1}\right] = \left[1 - \left(2 \cdot \frac{1}{400} \cdot 250 + 1\right) e^{-2\frac{1}{400} \cdot 300}\right] -$$

$$\left[1 - \left(2 \cdot \frac{1}{400} \cdot 200 + 1\right) e^{-2\frac{1}{400} \cdot 200}\right] = 0,0912.$$

Вывод: в таблице 3 приведены результаты расчетов интересующей нас вероятности при показательном законе (законе распределения Эрланга порядка $k = 1$) и при законе распределения Эрланга порядка $k = 2$.

Таблица 3

Результаты расчетов

Вероятность	Показательный закон, $k = 1$	Закон Эрланга, $k = 2$
$P(N < 300)$	0.5276	0.4922
$P(N \geq 300)$	0.4724	0.5578
$P(200 < N < 250)$	0.0713	0.0912

Из таблицы 3 видно, что использование закона Эрланга разного порядка ($k = 1$ и $k = 2$) для описания вагонопотока N приводит к значительному изменению искомой вероятности.

3.4. Равномерное распределение

Непрерывная случайная величина X называется равномерно распределенной на отрезке $[a, b]$, если распределение ее вероятностей описывается функцией $f(x)$ плотности распределения вероятностей и функцией $F(x)$ распределения вероятностей в соответствии с выражениями

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a}, & x \in [a,b], \\ 0, & x \notin [a,b], \end{cases} \tag{47}$$

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt = \begin{cases} 0, & x \leq a, \\ \dfrac{x-a}{b-a}, & a < x < b, \\ 1, & x > b. \end{cases} \tag{48}$$

Каждое из выражений (47), (48) называют также *законом равномерного распределения вероятностей случайной величины X* или *законом равномерной плотности вероятностей случайной величины X с параметрами a и b.*

Обозначается равномерное распределение символом $R(a,b)$; факт подчинения случайной величины X закону равномерного распределения записывается в виде $X \in R(a,b)$ [2], [3], [4].

Равномерное распределение описывает случайную величину X в тех процессах, когда все значения X на некотором интервале имеют равную возможность для наблюдения.

Численные характеристики этой величины – математическое ожидание, дисперсия и среднее квадратическое отклонение определяются по формулам:

$$M(X) = \int_a^b x\, f(x)dx = \int_a^b x \frac{1}{b-a} dx = \frac{a+b}{2}. \tag{49}$$

$$D(X) = \int_a^b \left[x - M(X)\right]^2 f(x)dx = \\ = \int_a^b \left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2 \cdot \frac{1}{b-a} dx = \frac{(b-a)^2}{12}. \tag{50}$$

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)} = \frac{b-a}{2\sqrt{3}}. \tag{51}$$

Для нахождения вероятностей P событий

$$X < x,\ X > x,\ x_1 < X < x_2,$$

где $x_1 > a,\ x_2 < b$ используем выражения:

$$F(x) = P(X < x) = \frac{x-a}{b-a}, \tag{52}$$

$$P(X \geq x) = 1 - P(X < x) = 1 - \frac{x-a}{b-a}, \tag{53}$$

$$P(x_1 < X < x_2) = F(x_2) - F(x_1) = \frac{x_2 - a}{b-a} - \frac{x_1 - a}{b-a} = \frac{x_2 - x_1}{b-a}. \tag{54}$$

Пример 9. На платформу станции метро пассажир приходит в некоторый момент времени. Интервал времени между прибытием поездов равен 1 мин. Найти вероятность того, что пассажир будет ожидать поезд

а) менее 15 сек, *б*) более 15 сек.

Решение. Поскольку случайное событие «пассажир приходит на платформу» наблюдается с равной возможностью в любой момент времени, то время ожидания T является случайной величиной, распределенной в промежутке времени (0;1) мин с равномерной плотностью вероятностей. Искомую вероятность находим по формулам (52), (53):

$$F(10) = P(T < 10) = \frac{15-0}{60-0} = 0,25,$$

$$P(T \geq 10) = 1 - P(T < 10) = 1 - 0,25 = 0,75.$$

Заметим, что формулировка случайного события «ожидать 10 сек.», как правило, предполагает «ожидать менее 10 сек», либо «ожидать в пределах 10 сек», но ни в коем случае не предполагает «ожидать ровно 10 сек». Вероятность события «ожидать ровно 10 сек» равносильна вероятности события «попасть в точку $t = 10$ на промежутке (0;60)», которая теоретически равна нулю.

Пример 10. Пусть величина вагонопотока N, прибывающего на сортировочную станцию, подчинена закону равномерной плотности вероятностей. Среднее значение $\overline{N} = 400$ вагонов, параметр $a = 90$ вагонов. Найти вероятность того, что величина вагонопотока N будет: *а*) меньше некоторого критического значения $N_{кр} = 300$, *б*) больше $N_{кр} = 300$, *в*) находиться в пределах от $N_1 = 200$ до $N_2 = 250$.

Решение. Искомая вероятность определяется по формулам (52), (53), (54) соответственно, но для этого необходимо знать два параметра: a (задан) и b (требуется найти). Находим b из выражения (49):

$$\overline{N} = \frac{a+b}{2}, \quad 400 = \frac{90+b}{2}, \quad b = 710.$$

Тогда

$$P\left(N < N_{\text{кр}}\right) = \frac{N_{\text{кр}} - a}{b-a},$$

$$P\left(N < 300\right) = \frac{300-90}{710-90} = 0,339,$$

$$P\left(N \geq N_{\text{кр}}\right) = P\left(N \geq 300\right) =$$
$$= 1 - P\left(N < N_{\text{кр}}\right) = 1 - 0,339 = 0,661.$$

$$P\left(N_1 < N < N_2\right) = \frac{N_2 - N_1}{b-a},$$

$$P\left(200 < N < 250\right) = \frac{250-200}{710-90} = 0,081.$$

Задача 2

Тема: Транспортная задача

Задание

Имеются три пункта отправления однородного груза и пять пунктов его назначения. На пунктах отправления груз находится в количестве a_1, a_2, a_3, в пункты назначения требуется доставить соответственно b_1, b_2, b_3, b_4, b_5 груза. Известна стоимость перевозки единицы груза из каждого пункта отправления в каждый пункт назначения (матрица D). Составить такой план перевозок, при котором необходимо вывезти все запасы груза, полностью удовлетворить все потребности и обеспечить при этом минимум затрат на перевозку.

Варианты исходных данных

1. $a_1 = 50,\ a_2 = 70,\ a_3 = 110,$
$b_1 = 50,\ b_2 = 50,\ b_3 = 50,$
$b_4 = 50,\ b_5 = 30.$

$$D = \begin{Bmatrix} 4 & 1 & 6 & 6 & 5 \\ 6 & 4 & 5 & 5 & 9 \\ 3 & 4 & 7 & 7 & 9 \end{Bmatrix}$$

2. $a_1 = 90,\ a_2 = 70,\ a_3 110,$
$b_1 = 70,\ b_2 = 20,\ b_3 = 70,$
$b_4 = 40,\ b_5 = 70$

$$D = \begin{Bmatrix} 7 & 4 & 9 & 8 & 2 \\ 6 & 8 & 5 & 8 & 3 \\ 9 & 2 & 9 & 7 & 9 \end{Bmatrix}$$

3. $a_1 = 60,\ a_2 = 40,\ a_3 = 80,$
$b_1 = 10,\ b_2 = 50,\ b_3 = 60,$
$b_4 = 50,\ b_5 = 10$

$$D = \begin{Bmatrix} 2 & 3 & 3 & 1 & 7 \\ 5 & 7 & 5 & 8 & 6 \\ 6 & 6 & 5 & 6 & 4 \end{Bmatrix}$$

4. $a_1 = 80,\ a_2 = 60,\ a_3 = 100,$
$b_1 = 40,\ b_2 = 60,\ b_3 = 40,$
$b_4 = 50,\ b_5 = 50$

$$D = \begin{Bmatrix} 6 & 2 & 7 & 4 & 2 \\ 3 & 6 & 4 & 9 & 3 \\ 3 & 1 & 2 & 2 & 6 \end{Bmatrix}$$

5. $a_1 = 50,\ a_2 = 30,\ a_3 = 70,$
$b_1 = 20,\ b_2 = 30,\ b_3 = 50,$
$b_4 = 30,\ b_5 = 20$

$$D = \begin{Bmatrix} 9 & 5 & 7 & 1 & 9 \\ 7 & 6 & 4 & 8 & 4 \\ 5 & 3 & 4 & 9 & 9 \end{Bmatrix}$$

6. $a_1 = 100,\ a_2 = 70,\ a_3 = 50,$
$b_1 = 60,\ b_2 = 10,\ b_3 = 30,$
$b_4 = 70,\ b_5 = 50$

$$D = \begin{Bmatrix} 3 & 11 & 6 & 8 & 8 \\ 2 & 10 & 1 & 5 & 9 \\ 6 & 3 & 8 & 6 & 1 \end{Bmatrix}$$

7. $a_1 = 70,\ a_2 = 50,\ a_3 = 90,$
$b_1 = 10,\ b_2 = 40,\ b_3 = 70,$
$b_4 = 20,\ b_5 = 70$

$$D = \begin{Bmatrix} 8 & 4 & 5 & 1 & 3 \\ 3 & 3 & 8 & 5 & 7 \\ 8 & 1 & 9 & 3 & 2 \end{Bmatrix}$$

8. $a_1 = 90,\ a_2 = 30,\ a_3 = 110,$
$b_1 = 10,\ b_2 = 60,\ b_3 = 50,$
$b_4 = 40,\ b_5 = 70$

$$D = \begin{Bmatrix} 9 & 1 & 1 & 7 & 6 \\ 6 & 4 & 7 & 8 & 9 \\ 2 & 9 & 3 & 5 & 3 \end{Bmatrix}$$

9. $a_1 = 60,\ a_2 = 40,\ a_3 = 80,$
$b_1 = 50,\ b_2 = 20,\ b_3 = 30,$
$b_4 = 40,\ b_5 = 40$

$$D = \begin{Bmatrix} 9 & 8 & 3 & 5 & 2 \\ 7 & 7 & 8 & 5 & 6 \\ 4 & 2 & 12 & 8 & 11 \end{Bmatrix}$$

10. $a_1 = 70,\ a_2 = 50,\ a_3 = 90,$
$b_1 = 60,\ b_2 = 10,\ b_3 = 10,$
$b_4 = 60,\ b_5 = 70$

$$D = \begin{Bmatrix} 7 & 1 & 7 & 4 & 9 \\ 4 & 1 & 1 & 1 & 5 \\ 5 & 6 & 6 & 8 & 2 \end{Bmatrix}$$

Методика типового решения

1. Общая постановка и математическая модель транспортной задачи

Транспортная задача является задачей линейного программирования, в общей постановке формулируется следующим образом [2], [9], [Доп. 3].

Имеются m пунктов отправления однородного груза и n пунктов его назначения. На пунктах отправления груз находится в количестве a_i, $i = \overline{1,m}$, в пункты назначения требуется доставить соответственно b_j, $j = \overline{1,n}$ груза. Известна стоимость c_{ij} перевозки единицы груза из каждого i-го пункта отправления в каждый j-й пункт назначения. Составить такой план перевозок, при котором необходимо вывезти все запасы груза, полностью удовлетворить все потребности и обеспечить при этом минимум затрат на перевозку.

Обозначим через x_{ij} количество груза, перевозимого из пункта i в пункт j, тогда условие задачи можно наглядно представить в виде таблицы, называемой *матрицей перевозок* $X = (x_{ij})$ (табл.1).

Таблица 1

Матрица перевозок

$a_i \backslash b_j$	b_1	b_2	…	b_j	…	b_n	$b_j \backslash a_i$
a_1	x_{11} c_{11}	x_{12} c_{12}	…	x_{1j} c_{1j}	…	x_{1n} c_{1n}	a_1
a_2	x_{21} c_{21}	x_{22} c_{22}	…	x_{2j} c_{2j}	…	x_{2n} c_{2n}	a_2
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$
a_i	x_{i1} c_{i1}	x_{i2} c_{i2}	…	x_{ij} c_{ij}	…	x_{in} c_{in}	a_i
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$
a_m	x_{m1} c_{m1}	x_{m2} c_{m2}	…	x_{mj} c_{mj}	…	x_{mn} c_{mn}	a_m
$a_i \backslash b_j$	b_1	b_2	…	b_j	…	b_n	$a_i \backslash b_j$

В матрице перевозок *mn* неизвестных x_{ij}, по условию задачи соблюдается равенство

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j \ . \tag{1}$$

Транспортная задача, в которой имеет место (1), называется *закрытой транспортной задачей*; если

$$\sum_{i=1}^{m} a_i > \sum_{j=1}^{n} b_j \quad \text{или} \quad \sum_{i=1}^{m} a_i < \sum_{j=1}^{n} b_j \ , \tag{2}$$

то – *открытой*.

В контрольной работе рассматривается закрытая транспортная задача, в которой по условию из каждого пункта отправления вывозится весь запас груза a_i, $i = \overline{1,m}$ и полностью удовлетворяются потребности b_j, $j = 1, n$ каждого пункта назначения:

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i , \quad i = \overline{1,m} , \tag{3}$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_i , \quad j = \overline{1,n} , \tag{4}$$

или в развернутом виде

$$x_{i1} + x_{i2} + ... + x_{in} = a_i, \quad i = \overline{1,m} , \qquad (3)_1$$

$$x_{1j} + x_{2j} + ... x_{mj} = b_j, \quad \text{j} = \overline{1,n} , \qquad (4)_1$$

Суммируя (3) по i и (4) по j, получим

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = \sum_{i=1}^{m} a_i , \tag{5}$$

$$\sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = \sum_{j=1}^{n} b_j . \tag{6}$$

Очевидно, что общая стоимость перевозки всех грузов определяется из выражения

$$C = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} x_{ij} c_{ij} . \tag{7}$$

Таким образом, математическая модель закрытой транспортной задачи представлена (3)1, (4)1, (7), задача формулируется как задача линейного программирования: найти такие неотрицательные значения переменных $x_{ij} \geq 0$, $i = \overline{1,m}$, $j = \overline{1,n}$, удовлетворяя связям $(3)_1$ и $(4)_1$, накладываемым на эти переменные, при которых линейная функция (7) принимает наименьшее значение.

Планом перевозок называется совокупность значений переменных x_{ij}, удовлетворяющая системе линейных уравнений (3) и (4).

В системе $(3)_1$, $(4)_1$ имеем $m+n$ линейных уравнений. Учитывая (1), а также (5) и (6), видим, что между уравнениями $(3)_1$ и $(4)_1$ существует линейная зависимость. Если из $m+n$ уравнений $(3)_1$, $(4)_1$ исключить любое уравнение, то оставшиеся $m + n - 1$ уравнений будут линейно независимы. Отсюда следует, что ранг системы $(3)_1$, $(4)_1$ равен $r = m + n - 1$.

Теорема 1 [Доп. 3]. *Ранг r матрицы перевозок на единицу меньше числа линейных уравнений в системе* (3), (4):

$$r = m + n - 1.$$

Теорема является основополагающей для решения транспортной задачи. Из нее следует утверждение о том, что каждое решение системы (3), (4) имеет

$$mn - r = mn - (m + n - 1) = (m - 1)(n - 1)$$

переменных, равных нулю (такие переменные называются *свободными*) и $r = m + n - 1$ переменных, не равных нулю (*базисные переменные*).

Транспортная задача, как любая задача линейного программирования, может быть решена *симплексным методом*. Однако в силу простоты математической модели (3)1, (4)1, (7) специально для транспортной задачи разработаны более простые методы. Мы используем *метод потенциалов*. Применение метода потенциалов основано на понятиях опорного плана, цикла в матрице перевозок, потенциалов пунктов отправления и назначения, косвенных и истинных тарифов, критерия оптимальности плана перевозок.

2. Опорный план. Цикл в матрице перевозок

В качестве примера рассмотрим следующую матрицу перевозок.

Таблица 2

Пример матрицы перевозок

a_i \ b_j	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	b_j / a_i
a_1	4 40_1 20_2	6	7	1 70_1 70_2	5 40_1 60_2	150
a_2	9 20_2	8 30_1 30_2	2 50_1 50_2	10	11 20_1	100
a_3	12	3 50_1 50_2	9	8	7	50
a_i / b_j	40	80	50	70	60	a_i \ b_j

Опорным планом перевозок называется любой первоначальный, последовательно улучшаемый план перевозок, составленный из $r = m + n - 1$ базисных переменных.

Для составления опорного плана используют различные методы, например, *минимальной стоимости, северо-западного угла, Фогеля, двойного предпочтения* [9].

План перевозок называется *невырожденным*, если он содержит $n + m - 1$ базисную переменную. При числе базисных переменных, не равном $n + m - 1$, план перевозок называется *вырожденным*. В табл. 2 представлен невырожденный опорный план, полученный методом минимальной стоимости: $x_{11} = 40$, $x_{14} = 70$, $x_{15} = 40$, $x_{22} = 30$, $x_{23} = 50$, $x_{25} = 20$, $x_{32} = 50$. Суть этого метода состоит в том, что вначале заполняются клетки с минимальной стоимостью перевозки единицы груза, а именно, в данном примере в следующей последовательности:

$$x_{14}(c_{14} = 1) = 70,\ x_{23}(c_{23} = 2) = 50,\ x_{32}(c_{32} = 3) = 50,\ x_{11}(c_{11} = 4) = 40.$$

При этом используются возможности пунктов отправления и назначения по количеству располагаемых и требуемых грузов соответственно:

$$b_4 = 70(a_1 = 150 > 70),\ b_3 = 50(a_2 = 100 > 50),\ a_3 = 50(b_2 = 80 > 50),$$

$$b_1 = 40(a_1 = 150 - 70 = 80 > 40).$$

Затем заполнены клетки с неизвестными x_{15}, x_{25}, x_{23}:

$$x_{15}= 40, x_{25}= 20,\ x_{22} = 30.$$

Проверка правильности выбора клеток и их заполнения осуществляется согласно формулам (3), (4), а также выводу о том, что оптимальный план перевозок содержит $n+m-1$ положительное значение x_{ij}.

В нашем примере $m = 3$, $n = 5$ и, следовательно, $n+m-1=$ $=3 + 5- 1 = 7$. Полученный опорный план также содержит 7 неизвестных, его улучшение, очевидно, должно произойти без изменения числа неизвестных.

Распределение запасов, имеющихся на пунктах отправления, по клеткам таблицы перевозок, другими словами, выбор пункта назначения и соответствующего количества груза предусматривает строгое соблюдение общего числа неизвестных опорного плана в соответствии с формулой $n+m-1$. При несовпадении числа неизвестных опорного плана с числом, определяемым, по формуле $n+m-1$, опорный план необходимо скорректировать.

Циклом относительно свободной переменной в матрице перевозок называется такая последовательность переменных x_{ij}, выделяемая из общего числа переменных x_{ij}, $i = \overline{1,m}$, $j = \overline{1,n}$, в которой одна и та же первая и последняя переменная является свободной, а все остальные любые две соседние переменные x_{ij} являются базисными и принадлежат либо одной строке, либо одному столбцу.

Теорема 2 [9]. *Пусть число неизвестных опорного плана равна* $n+m-1$. *Тогда каждой свободной переменной* x_{ij} *матрицы перевозок соответствует единственный цикл*.

Для приведенного примера согласно понятию «цикл» имеют место следующие 8 циклов:

1)	+	–	+	-	+	2)	+	–	+	–	+
	x_{12}	x_{15}	x_{25}	x_{22}	x_{12}		x_{13}	x_{15}	x_{25}	x_{23}	x_{13}
	0	40	20	30	0.		0	40	20	50	0.

$$3)\quad \begin{array}{ccccc} + & - & + & - & + \\ x_{21} & x_{11} & x_{15} & x_{25} & x_{21} \\ 0 & 40 & 40 & 20 & 0. \end{array} \qquad 4)\quad \begin{array}{ccccc} + & - & + & - & + \\ x_{24} & x_{14} & x_{15} & x_{25} & x_{24} \\ 0 & 70 & 40 & 20 & 0. \end{array}$$

$$5)\quad \begin{array}{ccccccc} + & - & + & - & + & - & + \\ x_{31} & x_{11} & x_{15} & x_{25} & x_{22} & x_{32} & x_{31} \\ 0 & 40 & 40 & 20 & 30 & 50 & 0. \end{array} \qquad 6)\quad \begin{array}{ccccc} + & - & + & - & + \\ x_{33} & x_{32} & x_{22} & x_{23} & x_{33} \\ 0 & 50 & 30 & 50 & 0. \end{array}$$

$$7)\quad \begin{array}{ccccccc} + & - & + & - & + & - & + \\ x_{34} & x_{32} & x_{22} & x_{25} & x_{15} & x_{14} & x_{34} \\ 0 & 50 & 30 & 20 & 40 & 70 & 0. \end{array} \qquad 8)\quad \begin{array}{ccccc} + & - & + & - & + \\ x_{35} & x_{32} & x_{22} & x_{25} & x_{35} \\ 0 & 50 & 30 & 20 & 0. \end{array}$$

Обход последовательности переменных опорного плана согласно определению «цикла» совершается либо по часовой стрелке (как в приведенных примерах), либо против часовой стрелки. От изменения направления обхода роль цикла в пересчете плана перевозок не меняется.

Каждая из переменных цикла называется *вершиной цикла*.

Каждой вершине цикла присваивается знак плюс «+» или минус « – », поочередно, начиная с «+».

3. Пересчет опорного плана по циклу

Опорный план, составленный по методу минимальной стоимости, как и по любому другому методу, в силу совместности и неопределенности системы линейных уравнений (3), (4), не является единственным.

Получение нового опорного плана пересчетом по циклу осуществляется путем замены базисной переменной цикла, имеющей наименьшее значение из переменных со знаком «–», на свободную переменную. Например, чтобы получить новый опорный план, используя цикл 1) к $\overset{+}{x}_{12} = 0$ прибавим $\bar{x}_{22} = 30 < 40 = \bar{x}_{15}$, одновременно скорректируем значения остальных переменных цикла: от $\bar{x}_{15} = 40$ вычтем $\bar{x}_{22} = 30$, а к $\overset{+}{x}_{25}=20$ прибавим $\bar{x}_{22}=30$. В результате, произведя замену значения базисной переменной $x_{22} = 30$ на значение свободной переменной $x_{12} = 0$, в цикле 1) получим новые значения переменных: $x_{12} = 30$, $x_{15} = 10$, $x_{25} = 50$, $x_{22} = 0$.

Новыми значениями переменных цикла 1) заменим прежние значения этих же переменных в предыдущем опорном плане. Таким образом, из опорного плана $x_{11} = 40$, $x_{14} = 70$, $x_{15} = 40$, $x_{22} = 30$, $x_{23} = 50$, $x_{25} = 20$, $x_{32} = 50$ пересчетом по циклу 1) получим новый опорный план $x_{11} = 40$, $x_{12} = 30$, $x_{14} = 70$, $x_{15} = 10$, $x_{23} = 50$, $x_{25} = 50$, $x_{32} = 50$.

Аналогично опорный план пересчитывается по любому циклу. Очевидно при этом, что понятие цикла сформулировано таким образом, чтобы не нарушить равенства (3), (4) и, следовательно, чтобы новый опорный план также был решением системы линейных уравнений (3), (4).

Определим общую стоимость перевозки грузов по каждому из полученных опорных планов:

$$C_1 = x_{11}\cdot c_{11} + x_{14}\cdot c_{14} + x_{15}\cdot c_{15} + x_{22}\cdot c_{22} + x_{23}\cdot c_{23} + x_{25}\cdot c_{25} + x_{32}\cdot c_{32} = \\ = 40\cdot 4 + 70\cdot 1 + 40\cdot 5 + 30\cdot 8 + 50\cdot 2 + 20\cdot 11 + 50\cdot 3 = 1140.$$

$$C_2 = x_{11}\cdot c_{11} + x_{12}\cdot c_{12} + x_{14}\cdot c_{14} + x_{15}\cdot c_{15} + x_{23}\cdot c_{23} + x_{25}\cdot c_{25} + x_{32}\cdot c_{32} = \\ = 40\cdot 4 + 30\cdot 6 + 70\cdot 1 + 10\cdot 5 + 50\cdot 2 + 50\cdot 11 + 50\cdot 3 = 1260.$$

Поскольку $C_2 = 1260 > 1140 = C_1$, то пересчет опорного плана по циклу 1) не привел к улучшению плана перевозок.

Метод потенциалов позволяет целенаправленно, используя пересчет по циклу, не только улучшить план перевозок, но и критериально доказать его оптимальность.

4. Метод потенциалов

Предположим, что опорный план является невырожденным, т.е. содержит $r = m + n - 1$ базисную переменную x_{ij}; базисная переменная x_{ij} заполняет клетку (i, j) матрицы перевозок.

Потенциалом пункта отправления a_i, $i=\overline{1,m}$, обозначим его через α_i, $i=\overline{1,m}$, и потенциалом пункта назначения b_j, $j=\overline{1,n}$, обозначим его через β_j, $j=\overline{1,n}$, назовем соответственно такие величины α_i, $i=\overline{1,m}$ и β_j, $j=\overline{1,n}$, сумма которых равна тарифу c_{ij} заполненной базисной переменной x_{ij} клетки (i, j):

$$\alpha_i+\beta_j=c_{ij}. \tag{8}$$

Заданный тариф c_{ij} любой клетки матрицы перевозок назовем *истинным*.

Составим таким образом систему из $m+n-1$ линейных уравнений (8), содержащую m неизвестных потенциалов α_i, $i=\overline{1,m}$ и n неизвестных потенциалов β_j, $j=\overline{1,n}$. Составленная система совместна, но и неопределенна в силу того, что число неизвестных $m+n$ на единицу больше числа уравнений. Для ее решения любому неизвестному потенциалу можно придать любое произвольно выбранное значение. С целью упрощения вычислений примем $\alpha_1=0$. Из полученных значений потенциалов α_i и β_j, теперь уже для каждой свободной клетки (в свободной клетке $x_{ij}=0$), образуем сумму, которую назовем *косвенным тарифом свободной клетки*, обозначим его через $\overline{c}_{ij}$:

$$\alpha_i+\beta_j=\overline{c}_{ij}. \tag{9}$$

Критерий оптимальности оцениваемого плана перевозок сформирован в следующей теореме.

Теорема 3 [Доп. 3]. *Пусть для всех свободных клеток матрицы перевозок косвенные тарифы меньше истинных. Тогда план перевозок оптимален.*

Если хотя бы для одной свободной клетки косвенный тариф окажется больше истинного, то план перевозок неоптимален и необходимо провести его дальнейшее улучшение. Улучшение состоит в том, чтобы относительно свободной клетки, для которой косвенный тариф оказался больше истинного, составить цикл и пересчитать по нему оцениваемый на оптимальность план перевозок. Оценку оптимальности нового плана перевозок выполнить аналогично изложенному выше порядку.

Теорема 4 [9]. *Пересчет опорного плана по циклу, составленному относительно свободной клетки, в которой косвенный тариф больше истинного, приводит к уменьшению общей стоимости перевозок.*

Если косвенный тариф какой-либо свободной клетки оказался равным истинному, а для всех остальных свободных клеток меньше истинного, то пересчет плана перевозок относительно этой свободной клетки даст новый план, общая стоимость которого будет равной общей стоимости оцениваемого плана.

5. Пример

Оценим на оптимальность опорный план перевозок (см. табл. 2).

1. Определяем потенциалы α_i, $i=\overline{1,3}$ и β_j, $j=\overline{1,5}$ пунктов отправления и пунктов назначения соответственно. Для этого составим систему линейных уравнений (8) относительно неизвестных α_i, $i=\overline{1,3}$ и β_j, $j=\overline{1,5}$:

$$
\begin{array}{lll}
\alpha_1+\beta_1=4, & \alpha_1=0, & \beta_1=4, \\
\alpha_1+\beta_4=1, & & \beta_4=1, \\
\alpha_1+\beta_5=5, & & \beta_5=5, \\
\alpha_2+\beta_2=8, & & \beta_2=2, \\
\alpha_2+\beta_3=2, & & \beta_3=-4, \\
\alpha_2+\beta_5=11, & \alpha_2=6, & \\
\alpha_3+\beta_2=3, & \alpha_3=1. &
\end{array}
$$

Имеем систему из 7 линейных уравнений с 8 неизвестными, система совместна и неопределенна. Для определенности системы примем неизвестную α_1, равную нулю, тогда решением системы будут представленные выше значения потенциалов α_i, $i=\overline{1,3}$ и β_j, $j=\overline{1,5}$.

2. Оцениваем на оптимальность опорный перевозок табл.2.

2.1. Определяем косвенные тарифы свободных клеток матрицы перевозок (табл. 2) по формуле (9) и сравниваем их с истинными тарифами:

$$\alpha_1+\beta_2=0+2=2<6,$$
$$\alpha_1+\beta_3=0-4=-4<7,$$
$$\alpha_2+\beta_1=6+4=10>9,$$
$$\alpha_2+\beta_4=6+1=7<10,$$
$$\alpha_3+\beta_1=1+4=5<12,$$
$$\alpha_3+\beta_3=1-4=-3<9,$$
$$\alpha_3+\beta_4=1+1=2<8,$$
$$\alpha_3+\beta_5=1+5=6<7.$$

2.2. Сравнение показывает, что в свободной клетке (2;1) косвенный тариф больше истинного. Поэтому согласно теореме 3 оцениваемый план не является оптимальным и требуется его дальнейшее улучшение.

3. Улучшаем опорный плана перевозок (табл.2). Для этого составим цикл относительно свободной клетки (2;1) и пересчитаем данный план по составленному циклу.

3.1. Цикл относительно свободной клетки (2;1) представляется следующей последовательностью переменных x_{ij}:

$$\begin{array}{ccccc} + & - & + & - & + \\ x_{21} & x_{11} & x_{15} & x_{25} & x_{21} \\ 0 & 40 & 40 & 20 & 0. \end{array}$$

3.2. Выбираем наименьшее из значений переменных в отрицательных вершинах и поочередно в соответствии с расставленными знаками либо прибавляем его, либо вычитаем из значений переменных цикла, получим:

$$\begin{array}{ccccc} x_{21} & x_{11} & x_{15} & x_{25} & x_{21} \\ 20 & 20 & 60 & 0 & 20. \end{array}$$

3.3. Заменяем в опорном плане значения переменных составленного цикла на полученные новые значения тех же переменных, получим новый опорный план:

$$x_{11} = 20, x_{14} = 70,\ x_{15} = 60, x_{21} = 20, x_{22} = 30,$$
$$x_{23} = 50, x_{25} = 0, x_{32} = 50.$$

Запишем этот план в табл. 2. Согласно теореме 4 общая стоимость нового плана должна быть меньше общей стоимости предыдущего плана. Проверим данное утверждение, для чего сравним стоимость $C_1 = 1140$ перевозок оцениваемого опорного плана и нового плана C_3:

$$C_3 = x_{11} \cdot c_{11} + x_{14} \cdot c_{14} + x_{15} \cdot c_{15} + x_{21} \cdot c_{21} + x_{22} \cdot c_{22} + x_{23} \cdot c_{23} + x_{32} \cdot c_{32} =$$
$$= 20 \cdot 4 + 70 \cdot 1 + 60 \cdot 5 + 20 \cdot 9 + 30 \cdot 8 + 50 \cdot 2 + 50 \cdot 3 = 1120.$$

Из сравнения стоимостей двух планов видим, что новый план лучше оцениваемого: $C_3 = 1120 < 1140 = C_1$.

4. Проверяем новый план по критерию оптимальности согласно теореме 3.

4.1. Определяем потенциалы пунктов отправления и пунктов назначения в соответствии с новым планом:

$$\begin{array}{lll}
\alpha_1 + \beta_1 = 4, & \alpha_1 = 0, & \beta_1 = 4, \\
\alpha_1 + \beta_4 = 1, & & \beta_4 = 1, \\
\alpha_1 + \beta_5 = 5, & & \beta_5 = 5, \\
\alpha_2 + \beta_1 = 9, & \alpha_2 = 5, & \\
\alpha_2 + \beta_2 = 8, & & \beta_2 = 3, \\
\alpha_2 + \beta_3 = 2, & & \beta_3 = -3, \\
\alpha_3 + \beta_2 = 3, & \alpha_3 = 0. &
\end{array}$$

4.2. Определяем косвенные тарифы свободных клеток новой матрицы перевозок и сравниваем их с истинными:

$$\alpha_1+\beta_2=0+3=3<6,$$
$$\alpha_1+\beta_3=0-3=-3<7,$$
$$\alpha_2+\beta_4=5+1=6<10,$$
$$\alpha_2+\beta_5=5+5=10<11,$$
$$\alpha_3+\beta_1=0+4=4<12,$$
$$\alpha_3+\beta_3=0-3=-3<9,$$
$$\alpha_3+\beta_4=0+1=1<8,$$
$$\alpha_3+\beta_5=0+5=5<7.$$

4.3. Как видим, для всех свободных клеток матрицы перевозок косвенные тарифы меньше истинных. Следовательно, согласно теореме 3 полученный новый план перевозок оптимален.

5. *Ответ*. Составлен оптимальный план перевозок грузов

$$x_{11}=20,\ x_{14}=70,\ x_{15}=60,\ x_{21}=20,\ x_{22}=30,\ x_{23}=50,\ x_{32}=50,$$

при котором общая стоимость перевозки всех грузов из пунктов отправления в пункты назначения является минимальной и равна C_3=1120.

Приложение 1

Значения плотности вероятности нормированного нормального распределения

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

x	Сотые доли x									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,39894	39892	39886	39876	39862	39844	39822	39797	39767	39733
0,1	39695	39654	39608	39559	39505	39448	39387	39322	39253	39181
0,2	39104	39024	38940	38853	38762	38667	38568	38466	38361	38251
0,3	38139	38023	37903	37780	37654	37524	37391	37255	37115	36973
0,4	36827	36678	36526	36371	36213	36053	35889	35723	35553	35381
0,5	35207	35029	34849	34667	34482	34294	34105	33912	33718	33521
0,6	33322	33121	32918	32713	32506	32297	32086	31874	31659	31443
0,7	31225	31006	30785	30563	30339	30114	29887	29658	29430	29200
0,8	28969	28737	28504	28269	28034	27798	27562	27324	27086	26848
0,9	26609	26369	26129	25888	25647	25406	25164	24923	25681	24439
1,0	24197	23955	23713	23471	23230	22988	22747	22506	22265	22025
1,1	21785	21546	21307	21069	20831	20594	20357	20121	19886	19652
1,2	19419	19186	18954	18724	18494	18265	18037	17810	17585	17360
1,3	17137	16915	16694	16474	16256	16038	15822	15608	15395	15183
1,4	14973	14764	14556	14350	14146	13943	13742	13542	13344	13147
1,5	12952	12758	12566	12376	12188	12001	11816	11632	11450	11270
1,6	11092	10915	10741	10567	10396	10226	10059	09893	09728	09566
1,7	09405	09246	09089	08933	08780	08628	08478	08329	08183	08038
1,8	07895	07754	07614	07477	07341	07206	07074	06943	06814	06687
1,9	06562	06438	06316	06195	06077	05959	05844	05730	05618	05508
2,0	05399	05292	05186	05082	04980	04879	04780	04682	04586	04491
2,1	04398	04307	04217	04128	04041	03955	03871	03788	03706	03626
2,2	03547	03470	03394	03319	03246	03174	03103	03034	02965	02898
2,3	02833	02768	02705	02643	02582	02522	02463	02406	02349	02294
2,4	02239	02186	02134	02083	02033	01984	01936	01888	01842	01797
2,5	01753	01709	01667	01625	01585	01545	01506	01468	01431	01394
2,6	01358	01323	01289	01256	01223	01191	01160	01130	01100	01071
2,7	01042	01014	00987	00961	00935	00909	00885	00861	00837	00814
2,8	00792	00770	00748	00727	00707	00687	00668	00649	00631	00613
2,9	00595	00578	00562	00545	00530	00514	00499	00485	00470	00457

Окончание прил. 1

x	Сотые доли x									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
3,0	00443	00430	00417	00405	00393	00381	00370	00358	00348	00337
3,1	00327	00317	00307	0,0298	00288	00279	00271	00262	00254	00246
3,2	00238	00231	00224	00216	00210	00203	00196	00190	00184	00178
3,3	00172	00167	00161	00156	00151	00146	00141	00136	00132	00127
3,4	00123	00119	00115	00111	00107	00104	00100	00097	00094	00090
3,5	00087	00084	00081	00079	00076	00073	00071	00068	00066	00063
3,6	00061	00059	00057	00055	00053	00051	00049	00047	00046	00044
3,7	00042	00041	00039	00038	00037	00035	00034	00033	00031	00030
3,8	00029	00028	00027	00026	00025	00024	00023	00022	00021	00021
3,9	00020	00019	00018	00018	00017	00016	00016	00015	00014	00014
4,0	00013	00013	00012	00012	00011	00011	00011	00010	00010	00009

Приложение 2

Значения нормированной функции Лапласа

$$\Phi_0(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}}dt=\Phi(x)-0,5$$

Целые и десятые доли	Сотые доли x									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,00000	00399	00798	01197	01595	01994	02392	02790	03188	03586
0,1	03983	04380	04776	05172	05567	05962	06356	06749	07142	07535
0,2	07926	08317	08706	09095	09483	09871	10257	10642	11026	11409
0,3	11791	12172	12552	12930	13307	13683	14058	14431	14803	15173
0,4	15542	15910	16276	16640	17003	17364	17724	18082	18439	18793
0,5	19146	19497	19847	20194	20540	20884	21226	21566	21904	22240
0,6	22575	22907	23237	23565	23891	24215	24537	24857	25175	25490
0,7	25804	26115	26424	26730	27035	27337	27637	27935	28230	28524
0,8	28814	29103	29389	29673	29955	30234	30511	30785	31057	31327
0,9	31594	31859	32121	32381	32639	32894	33147	33398	33646	33891
1,0	34134	34375	34614	34850	35083	35314	35543	35769	35993	36214
1,1	36433	36650	36864	37076	37286	37493	37698	37900	38100	38298
1,2	38493	38686	38877	39065	39251	39435	39617	39796	39973	40147
1,3	40320	40490	40658	40824	40988	41149	41308	41466	41621	41774
1,4	41924	42073	42220	42364	42507	42647	42786	42922	43056	43189
1,5	43319	43448	43574	43699	43822	43943	44062	44179	44295	44408
1,6	44520	44630	44738	44845	44950	45053	45154	45254	45352	45449
1,7	45543	45637	45728	45818	45907	45994	46080	46164	46246	46327
1,8	46407	46485	46562	46638	46712	46784	46856	46926	46995	47062
1,9	47128	47193	47257	47320	47381	47441	47500	47558	47615	47670
2,0	47725	47778	47831	47882	47932	47982	48030	48077	48124	48169
2,1	48214	48257	48300	48341	48382	48422	48461	48500	48537	48574
2,2	48610	48645	48679	48713	48745	48779	48809	48840	48870	48899
2,3	48928	48956	48983	49010	49036	49061	49086	49111	49134	49158
2,4	49180	49202	49224	49245	49266	49286	49305	49324	49343	49361
2,5	49379	49396	49413	49430	49466	49461	49477	49492	49506	49520
2,6	49534	49547	49560	49573	49585	49598	49609	49621	49632	49643
2,7	49653	49664	49674	49683	49693	49702	49711	49720	49728	49736
2,8	49744	49752	49760	49767	49774	49781	49788	49795	49801	49807
2,9	49813	49819	49825	49831	49836	49841	49846	49851	49856	49861
3,0	49865									
3,5	49977									
4,0	49997									
4,5	499997									
5,0	4999997									

Приложение 3

Значения функции распределения стандартной нормальной случайной величины (функция Лапласа)

$$\Phi(x) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{1}{2}t^2} dt = P(X < x)$$

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
0,00	0,5000	−0,40	0,3446	−0,80	0,2119	−1,20	0,1151	−1,60	0,0548
−0,01	4960	−0,41	3409	−0,81	2090	−1,21	1131	−1,61	0537
−0,02	4920	−0,42	3372	−0,82	2061	−1,22	1112	−1,62	0526
−0,03	4880	−0,43	3336	−0,83	2033	−1,23	1093	−1,63	0516
−0,04	4840	−0,44	3300	−0,84	2005	−1,24	1075	−1,64	0505
−0,05	4801	−0,45	3264	−0,85	1977	−1,25	1056	−1,65	0495
−0,06	4761	−0,46	3228	−0,86	1949	−1,26	1038	−1,66	0485
−0,07	4721	−0,47	3192	−0,87	1922	−1,27	1020	−1,67	0475
−0,08	4681	−0,48	3156	−0,88	1894	−1,28	1003	−1,68	0465
−0,09	4641	−0,49	3121	−0,89	1867	−1,29	0985	−1,69	0455
−0,10	0,4602	−0,50	0,3085	−0,90	0,1841	−1,30	0,0968	−1,70	0,0446
−0,11	4562	−0,51	3050	−0,91	1814	−1,31	0951	−1,71	0436
−0,12	4522	−0,52	3015	−0,92	1788	−1,32	0934	−1,72	0427
−0,13	4483	−0,53	2981	−0,93	1762	−1,33	0918	−1,73	0418
−0,14	4443	−0,54	2946	−0,94	1736	−1,34	0901	−1,74	0409
−0,15	4404	−0,55	2912	−0,95	1711	−1,35	0885	−1,75	0401
−0,16	4364	−0,56	2877	−0,96	1685	−1,36	0869	−1,76	0392
−0,17	4325	−0,57	2843	−0,97	1660	−1,37	0853	−1,77	0384
−0,18	4286	−0,58	2810	−0,98	1635	−1,38	0838	−1,78	0375
−0,19	4247	−0,59	2776	−0,99	1611	−1,39	0823	−1,79	0367
−0,20	0,4207	−0,60	0,2743	−1,00	0,1587	−1,40	0,0808	−1,80	0,0359
−0,21	4168	−0,61	2709	−1,01	1563	−1,41	0793	−1,81	0351
−0,22	4129	−0,62	2676	−1,02	1539	−1,42	0778	−1,82	0344
−0,23	4090	−0,63	2643	−1,03	1515	−1,43	0764	−1,83	0336
−0,24	4052	−0,64	2611	−1,04	1492	−1,44	0749	−1,84	0329
−0,25	4013	−0,65	2578	−1,05	1469	−1,45	0735	−1,85	0322
−0,26	3974	−0,66	2546	−1,06	1446	−1,46	0721	−1,86	0314
−0,27	3936	−0,67	2514	−1,07	1423	−1,47	0708	−1,87	0307
−0,28	3897	−0,68	2483	−1,08	1401	−1,48	0694	−1,88	0301
−0,29	3859	−0,69	2451	−1,09	1379	−1,49	0681	−1,89	0294
−0,30	0,3821	−0,70	0,2420	−1,10	0,1357	−1,50	0,0668	−1,90	0,0288
−0,31	3783	−0,71	2389	−1,11	1335	−1,51	0655	−1,91	0281
−0,32	3745	−0,72	2358	−1,12	1314	−1,52	0643	−1,92	0274
−0,33	3707	−0,73	2327	−1,13	1292	−1,53	0630	−1,93	0268
−0,34	3669	−0,74	2297	−1,14	1271	−1,54	0618	−1,94	0262
−0,35	3632	−0,75	2266	−1,15	1251	−1,55	0606	−1,95	0256
−0,36	3594	−0,76	2236	−1,16	1230	−1,56	0594	−1,96	0250
−0,37	3557	−0,77	2206	−1,17	1210	−1,57	0582	−1,97	0244
−0,38	3520	−0,78	2177	−1,18	1190	−1,58	0571	−1,98	0239
−0,39	3483	−0,79	2148	−1,19	1170	−1,59	0559	−1,99	0233

Окончание прил. 3

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
−2,00	0,0228	0,28	6103	0,75	7734	1,22	8888	1,70	0,9554
−2,10	0179	0,29	6141	0,76	7764	1,23	8907	1,71	9564
−2,20	0139			0,77	7794	1,24	8925	1,72	9573
−2,30	0107	0,30	0,6179	0,78	7823	1,25	8944	1,73	9582
−2,40	0082	0,31	6217	0,79	7852	1,26	8962	1,74	9591
−2,50	0062	0,32	6255			1,27	8980	1,75	9599
−2,60	0047	0,33	6293	0,80	7881	1,28	8997	1,76	9608
−2,70	0035	0,34	6331	0,81	7910	1,29	9015	1,77	9616
−2,80	0026	0,35	6368	0,82	7939			1,78	9625
−2,90	0019	0,36	6406	0,83	7967	1,30	0,9032	1,79	9633
		0,37	6443	0,84	7995	1,31	9049		
−3,00	0,0014	0,38	6480	0,85	8023	1,32	9066	1,80	0,9641
−3,10	0010	0,39	6517	0,86	8051	1,33	9082	1,81	9649
−3,20	0007			0,87	8078	1,34	9099	1,82	9656
−3,30	0005	0,40	0,6554	0,88	8106	1,35	9115	1,83	9664
−3,40	0003	0,41	6591	0,89	8133	1,36	9131	1,84	9671
−3,50	0002	0,42	6628			1,37	9147	1,85	9678
−3,60	0002	0,43	6664	0,90	0,8159	1,38	9162	1,86	9686
−3,70	0001	0,44	6700	0,91	8186	1,39	9177	1,87	9693
−3,80	0001	0,45	6736	0,92	8212			1,88	9699
−3,90	0000	0,46	6772	0,93	8238	1,40	0,9192	1,89	9706
		0,47	6808	0,94	8264	1,41	9207		
0,00	0,5000	0,48	6844	0,95	8289	1,42	9222	1,90	0,9713
0,01	5040	0,49	6879	0,96	8315	1,43	9236	1,91	9719
0,02	5080			0,97	8340	1,44	9251	1,92	9726
0,03	5120	0,50	0,6915	0,98	8365	1,45	9265	1,93	9732
0,04	5160	0,51	6950	0,99	8389	1,46	9279	1,94	9738
0,05	5199	0,52	6985			1,47	9292	1,95	9744
0,06	5239	0,53	7019	1,00	0,8413	1,48	9306	1,96	9750
0,07	5279	0,54	7054	1,01	8437	1,49	9319	1,97	9756
0,08	5319	0,55	7088	1,02	8461			1,98	9761
0,09	5359	0,56	7123	1,03	8485	1,50	0,9332	1,99	9767
		0,57	7157	1,04	8508	1,51	9345	2,00	0,9772
0,10	0,5398	0,58	7190	1,05	8531	1,52	9357	2,10	9821
0,11	5438	0,59	7224	1,06	8554	1,53	9370	2,20	9861
0,12	5478			1,07	8577	1,54	9382	2,30	9893
0,13	5517	0,60	0,7257	1,08	8599	1,55	9394	2,40	9918
0,14	5557	0,61	7291	1,09	8621	1,56	9406	2,50	9938
0,15	5596	0,62	7324			1,57	9418	2,60	9953
0,16	5636	0,63	7357	1,10	0,8643	1,58	9429	2,70	9965
0,17	5675	0,64	7389	1,11	8665	1,59	9441	2,80	9974
0,18	5714	0,65	7422	1,12	8686			2,90	9981
0,19	5753	0,66	7454	1,13	8708	1,60	0,9452	3,00	0,9986
		0,67	7486	1,14	8729	1,61	9463	3,10	9990
0,20	0,5793	0,68	7517	1,15	8749	1,62	9474	3,20	9993
0,21	5832	0,69	7549	1,16	8770	1,63	9484	3,30	9995
0,22	5871			1,17	8790	1,64	9495	3,40	9997
0,23	5910	0,70	0,7580	1,18	8810	1,65	9505	3,50	9998
0,24	5948	0,71	7611	1,19	8830	1,66	9515	3,60	9998
0,25	5987	0,72	7642			1,67	9525	3,70	9999
0,26	6026	0,73	7673	1,20	0,8849	1,68	9535	3,80	9999
0,27	6064	0,74	7703	1,21	8869	1,69	9545	3,90	1,0000

Приложение 4

Закон (распределение Пуассона)

$$P(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$$

k \ λ	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
0	0,9048	0,8187	0,7408	0,6703	0,6065	0,5488	0,4966	0,4493	0,4066
1	0905	1638	2222	2681	3033	3293	3476	3595	3659
2	0045	0164	0333	0536	0758	0988	1217	1438	1647
3	0002	0019	0033	0072	0126	0198	0284	0383	0494
4	—	0001	0002	0007	0016	0030	0050	0077	0111
5	—	—	—	0001	0002	0004	0007	0012	0020
6	—	—	—	—	—	—	0001	0002	0003

Окончание

k \ λ	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	0,3699	1353	0498	0183	0067	0025	0009	0003	0001	0000
1	3679	2707	1494	0733	0337	0149	0064	0027	0011	0005
2	1839	2707	2240	1465	0842	0446	0223	0107	0050	0023
3	0613	1804	2240	1954	1404	0892	0521	0286	0150	0076
4	0153	0902	1680	1954	1755	1339	0912	0572	0337	0189
5	0031	0361	1008	1563	1755	1606	1277	0916	0607	0378
6	0005	0120	0504	1042	1462	1606	1490	1221	0911	0631
7	0001	0037	0216	0595	1044	1377	1490	1396	1171	0901
8	—	0009	0081	0298	0653	1033	1304	1396	1318	1126
9	—	0002	0027	0132	0363	0688	1014	1241	1318	1251
10	—	—	0008	0053	0181	0413	0710	0993	1186	1251
11	—	—	0002	0019	0082	0225	0452	0722	0970	1137
12	—	—	0001	0006	0034	0126	0263	0481	0728	0948
13	—	—	—	0002	0013	0052	0142	0296	0504	0729
14	—	—	—	0001	0005	0022	0071	0169	0324	0521
15	—	—	—	—	0002	0009	0033	0090	0194	0347
16	—	—	—	—	—	0003	0014	0045	0109	0217
17	—	—	—	—	—	0001	0006	0021	0058	0128
18	—	—	—	—	—	—	0002	0009	0029	0071
19	—	—	—	—	—	—	0001	0004	0014	0037
20	—	—	—	—	—	—	—	0002	0006	0019
21	—	—	—	—	—	—	—	0001	0003	0009
22	—	—	—	—	—	—	—	—	0001	0004
23	—	—	—	—	—	—	—	—	—	0002
24	—	—	—	—	—	—	—	—	—	0001

Приложение 5

Показательная функция

x	e^{-x}	x	e^{-x}	x	e^{-x}	x	e^{-x}	x	e^{-x}
0,00	1,0000	0,45	0,6376	0,90	0,4066	1,35	0,2592	1,80	0,1653
0,01	0,9900	0,46	0,6313	0,91	0,4025	1,36	0,2567	1,81	0,1637
0,02	0,9802	0,47	0,6250	0,92	0,3985	1,37	0,2541	1,82	0,1620
0,03	0,9704	0,48	0,6188	0,93	0,3946	1,38	0,2516	1,83	0,1604
0,04	0,9608	0,49	0,6126	0,94	0,3906	1,39	0,2491	1,84	0,1588
0,05	0,9512	0,50	0,6065	0,95	0,3867	1,40	0,2466	1,85	0,1572
0,06	0,9418	0,51	0,6005	0,96	0,3829	1,41	0,2441	1,86	0,1557
0,07	0,9324	0,52	0,5945	0,97	0,3791	1,42	0,2417	1,87	0,1541
0,08	0,9321	0,53	0,5886	0,98	0,3753	1,43	0,2393	1,88	0,1526
0,09	0,9139	0,54	0,5827	0,99	0,3716	1,44	0,2369	1,89	0,1511
0,10	0,9048	0,55	0,5769	1,00	0,3679	1,45	0,2346	1,90	0,1496
0,11	0,8958	0,56	0,5712	1,01	0,3642	1,46	0,2322	1,91	0,1481
0,12	0,8869	0,57	0,5655	1,02	0,3606	1,47	0,2299	1,92	0,1466
0,13	0,8781	0,58	0,5599	1,03	0,3570	1,48	0,2276	1,93	0,1451
0,14	0,8694	0,59	0,5543	1,04	0,3535	1,49	0,2254	1,94	0,1437
0,15	0,8607	0,60	0,5488	1,05	0,3499	1,50	0,2231	1,95	0,1423
0,16	0,8521	0,61	0,5434	1,06	0,3465	1,51	0,2209	1,96	0,1409
0,17	0,8437	0,62	0,5379	1,07	0,3430	1,52	0,2187	1,97	0,1395
0,18	0,8353	0,63	0,5326	1,08	0,3396	1,53	0,2165	1,98	0,1381
0,19	0,8270	0,64	0,5273	1,09	0,3362	1,54	0,2144	1,99	0,1367
0,20	0,8187	0,65	0,5220	1,10	0,3329	1,55	0,2122	2,00	0,1353
0,21	0,8106	0,66	0,5169	1,11	0,3296	1,56	0,2101	2,01	0,1340
0,22	0,8025	0,67	0,5117	1,12	0,3263	1,57	0,2080	2,02	0,1327
0,23	0,7945	0,68	0,5066	1,13	0,3230	1,58	0,2060	2,03	0,1313
0,24	0,7866	0,69	0,5016	1,14	0,3198	1,59	0,2039	2,04	0,1300
0,25	0,7788	0,70	0,4966	1,15	0,3166	1,60	0,2019	2,05	0,1287
0,26	0,7711	0,71	0,4916	1,16	0,3135	1,61	0,1999	2,06	0,1275
0,27	0,7634	0,72	0,4868	1,17	0,3134	1,62	0,1979	2,07	0,1262
0,28	0,7558	0,73	0,4819	1,18	0,3073	1,63	0,1959	2,08	0,1249
0,29	0,7483	0,74	0,4771	1,19	0,3042	1,64	0,1940	2,09	0,1237
0,30	0,7408	0,75	0,4724	1,20	0,3012	1,65	0,1920	2,10	0,1225
0,31	0,7334	0,76	0,4677	1,21	0,2982	1,66	0,1901	2,11	0,1212
0,32	0,7261	0,77	0,4630	1,22	0,2952	1,67	0,1882	2,12	0,1200
0,33	0,7189	0,78	0,4584	1,23	0,2923	1,68	0,1864	2,13	0,1188
0,34	0,7118	0,79	0,4538	1,24	0,2894	1,69	0,1845	2,14	0,1177
0,35	0,7047	0,80	0,4493	1,25	0,2865	1,70	0,1827	2,15	0,1165
0,36	0,6977	0,81	0,4449	1,26	0,2837	1,71	0,1809	2,16	0,1153
0,37	0,6907	0,82	0,4404	1,27	0,2808	1,72	0,1791	2,17	0,1142
0,38	0,6839	0,83	0,4360	1,28	0,2780	1,73	0,1773	2,18	0,1130
0,39	0,6771	0,84	0,4317	1,29	0,2753	1,74	0,1755	2,19	0,1119
0,40	0,6703	0,85	0,4274	1,30	0,2725	1,75	0,1738	2,20	0,1108
0,41	0,6637	0,86	0,4232	1,31	0,2698	1,76	0,1720	2,21	0,1097
0,42	0,6570	0,87	0,4190	1,32	0,2671	1,77	0,1703	2,22	0,1086
0,43	0,6505	0,88	0,4148	1,33	0,2645	1,78	0,1686	2,23	0,1075
0,44	0,6440	0,89	0,4107	1,34	0,2618	1,79	0,1670	2,24	0,1065

Окончание прил. 5

x	e^{-x}	x	e^{-x}	x	e^{-x}	x	e^{-x}	x	e^{-x}
2,25	0,1054	2,71	0,06654	3,17	0,04200	3,63	0,02652	5,00	0,00674
2,26	0,1044	2,72	0,06587	3,18	0,04159	3,64	0,02625	5,10	0,00610
2,27	0,1033	2,73	0,06522	3,19	0,04117			5,20	0,00552
2,28	0,1023	2,74	0,06457			3,65	0,02599	5,30	0,00499
2,29	0,1013			3,20	0,04076	3,66	0,02573	5,40	0,00452
		2,75	0,06393	3,21	0,04036	3,67	0,02548	5,50	0,00409
2,30	0,10026	2,76	0,06329	3,22	0,03996	3,68	0,02522	5,60	0,00370
2,31	0,09926	2,77	0,06266	3,23	0,03956	3,69	0,02497	5,70	0,00335
2,32	0,09827	2,78	0,06204	3,24	0,03916			5,80	0,00303
2,33	0,09730	2,79	0,06142			3,70	0,02472	5,90	0,00274
2,34	0,09633			3,25	0,03877	3,71	0,02448		
		2,80	0,06081	3,26	0,03839	3,72	0,02423	6,00	0,002479
2,35	0,09537	2,81	0,06020	3,27	0,03801	3,73	0,02399	6,10	0,002243
2,36	0,09442	2,82	0,05961	3,28	0,03763	3,74	0,02375	6,20	0,002029
2,37	0,09348	2,83	0,05901	3,29	0,03725			6,30	0,001836
2,38	0,09255	2,84	0,05843			3,75	0,02352	6,40	0,001662
2,39	0,09163			3,30	0,03688	3,76	0,02328	6,50	0,001503
		2,85	0,05784	3,31	0,03652	3,77	0,02305	6,60	0,001360
2,40	0,09072	2,86	0,05727	3,32	0,03615	3,78	0,02282	6,70	0,001231
2,41	0,08982	2,87	0,05670	3,33	0,03579	3,79	0,02260	6,80	0,001114
2,42	0,08892	2,88	0,05613	3,34	0,03544			6,90	0,001008
2,43	0,08804	2,89	0,05558			3,80	0,02237		
2,44	0,08716			3,35	0,03508	3,81	0,02215	7,00	0,000912
		2,90	0,05502	3,36	0,03474	3,82	0,02193	7,10	0,000825
2,45	0,08628	2,91	0,05448	3,37	0,03439	3,83	0,02171	7,20	0,000747
2,46	0,08543	2,92	0,05393	3,38	0,03405	3,84	0,02149	7,30	0,000676
2,47	0,08458	2,93	0,05340	3,39	0,03371			7,40	0,000611
2,48	0,08374	2,94	0,05287			3,85	0,02128	7,50	0,000553
2,49	0,08291			3,40	0,03337	3,86	0,02107	7,60	0,000500
		2,95	0,05234	3,41	0,03304	3,87	0,02086	7,70	0,000453
2,50	0,08208	2,96	0,05182	3,42	0,03271	3,88	0,02065	7,80	0,000410
2,51	0,08127	2,97	0,05130	3,43	0,03239	3,89	0,02045	7,90	0,000371
2,52	0,08046	2,98	0,05079	3,44	0,03206				
2,53	0,07966	2,99	0,05029			3,90	0,02024	8,00	0,000335
2,54	0,07887			3,45	0,03175	3,91	0,02004	8,10	0,000304
		3,00	0,04979	3,46	0,03143	3,92	0,01984	8,20	0,000275
2,55	0,07808	3,01	0,04929	3,47	0,03112	3,93	0,01964	8,30	0,000249
2,56	0,07730	3,02	0,04880	3,48	0,03081	3,94	0,01945	8,40	0,000225
2,57	0,07654	3,03	0,04832	3,49	0,03050			8,50	0,000203
2,58	0,07577	3,04	0,04783			3,95	0,01925	8,60	0,000184
2,59	0,07502			3,50	0,03020	3,96	0,01906	8,70	0,000167
		3,05	0,04736	3,51	0,02990	3,97	0,01887	8,80	0,000151
2,60	0,07427	3,06	0,04689	3,52	0,02960	3,98	0,01869	8,90	0,000136
2,61	0,07353	3,07	0,04642	3,53	0,02930	3,99	0,01850		
2,62	0,07280	3,08	0,04596	3,54	0,02901			9,00	0,000123
2,63	0,07208	3,09	0,04550			4,00	0,01832	9,10	0,000112
2,64	0,07136			3,55	0,02872	4,10	0,01657	9,20	0,000101
		3,10	0,04505	3,56	0,02844	4,20	0,01500	9,30	0,000091
2,65	0,07065	3,11	0,04460	3,57	0,02816	4,30	0,01357	9,40	0,000083
2,66	0,06995	3,12	0,04416	3,58	0,02788	4,40	0,01228	9,50	0,000075
2,67	0,06925	3,13	0,04372	3,59	0,02760	4,50	0,01111	9,60	0,000068
2,68	0,06856	3,14	0,04328			4,60	0,01005	9,70	0,000061
2,69	0,06788			3,60	0,02732	4,70	0,00910	9,80	0,000055
		3,15	0,04285	3,61	0,02705	4,80	0,00823	9,90	0,000050
2,70	0,06721	3,16	0,04243	3,62	0,02678	4,90	0,00745	10,0	0,000045

СОДЕРЖАНИЕ

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ТЕХНОЛОГИИ
РАБОТЫ ЖЕЛЕЗНЫХ ДОРОГ

Рабочая программа,
задание на контрольную работу

Редактор *Д.Н. Тихонычев*
Корректор *В.В. Игнатова*
Компьютерная верстка *Г.Д. Волкова*

Тип. зак.	Изд. зак. 305	Тираж 3 500 экз.
Подписано в печать 13.02.09	Гарнитура Newton	Формат 60 × 90 1/16
Усл. печ. л. 5,0		Офсет

Издательский центр
Информационно-методического управления РОАТ,
125993, Москва, Часовая ул., 22/2