РОССИЙСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ОТКРЫТЫЙ
ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ПУТЕЙ СООБЩЕНИЯ

26/23/4

Одобрено кафедрой
«Экономика, финансы
и управление
на транспорте»

Утверждено деканом
факультета
«Экономический»

ЭКОНОМИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ НА ТРАНСПОРТЕ

Задание на контрольные работы №1 и 2
с методическими указаниями
для студентов V курса

специальности

080502 ЭКОНОМИКА И УПРАВЛЕНИЕ
НА ПРЕДПРИЯТИИ
(ЖЕЛЕЗНОДОРОЖНЫЙ ТРАНСПОРТ) (Э)

РГОТУПС

М о с к в а – 2007

Программа подготовлена на основании учебной программы данной дисциплины, составленной в соответствии с государственными требованиями к минимуму содержания и уровню подготовки экономиста-менеджера по специальности 080502 (Э).

Составитель — канд. экон. наук, доц. Е.А. Сеславина

Рецензент — канд. экон. наук, доц. В.И. Морозова (МИИТ)

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА №1

Задача 1

Тема. Метод потенциалов для решения транспортной задачи в матричной форме с ограничениями пропускной способности

Центральной задачей оптимизации перевозок грузов на железнодорожном транспорте является прикрепление поставщиков к потребителям с тем, чтобы **общая сумма затрат** на транспортировку грузов была минимальной. Такую задачу принято называть «транспортной».

Задание

1. Построить оптимальный план перевозок каменного угля с пяти станций A_i (i = 1, 2, 3, 4, 5), до девяти крупных потребителей, имеющих подъездные пути B_j (j = 1, 2,...,9).

В контрольной работе для задачи № 1 по своему варианту студент приводит лишь две заполненные матрицы: с начальным планом перевозки и с оптимальным планом перевозки.

На обеих матрицах записываются ресурсы станций отправления и потребности станций назначения.

2. Определить объем тонно-километровой работы начального и оптимального планов перевозки грузов.

Исходные данные

Данные о наличии ресурсов на пяти станциях отправления A_i приведены в табл. 1, данные о размерах прибытия груза B_j на девять станций назначения — в табл. 2. Расстояние перевозки от каждой i-й станции отправления до каждой i-й станции назначения указано в правом верхнем углу каждой клетки матрицы табл. 3. В левом верхнем углу ряда клеток матрицы табл. 3 указаны ограничения пропускной способности. Матрица расстояний и ограничений пропускной способности принимается одинаковой для любого варианта.

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ К ВЫПОЛНЕНИЮ ЗАДАЧИ 1

1. Порядок решения задачи следующий:

Таблица 1

Ресурсы станций отправления A_i (строки матрицы)

Номер станции отправления	Варианты (по последней цифре учебного шифра)									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
A_1	150	140	130	120	400	180	150	150	100	160
A_2	I60	150	120	400	150	400	160	145	150	250
A_3	130	150	400	170	140	120	400	155	200	150
A_4	160	400	160	160	160	140	150	400	150	300
A_5	400	160	190	150	150	160	140	150	400	140
Итого	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000

Таблица 2

Объем потребности B_j получателя (столбцы матрицы)

Номер станции назначения	Варианты (по предпоследней цифре учебного шифра)									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
B_1	90	80	75	65	125	35	95	185	165	75
B_2	135	175	135	95	95	105	85	90	105	85
B_3	165	85	125	105	80	95	135	80	85	105
B_4	90	115	80	135	70	115	60	75	95	135
B_5	95	105	95	95	65	85	55	105	75	195
B_6	60	85	115	180	135	105	105	105	115	80
B_7	125	95	105	75	115	90	125	95	90	95
B_8	115	125	90	115	135	135	135	175	125	135
B_9	125	135	180	135	180	135	205	90	145	95
Итого	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000

2. Предварительно записывают условия решения задачи в матричной форме. В строке A_i (см. пример, табл. 3) указывают размер ресурсов у отправителей, а в столбце B_j — размер

потребностей у получателей. В верхнем правом углу каждой клетки указано значение C_{ij} — критерия оптимальности перевозки грузов от i поставщика к j потребителю. В решении задачи принято, что C_{ij} означает расстояние перевозки от i-го поставщика до j-го потребителя. Условием задачи установлено, что размер всех ресурсов у отправителей равен общей потребности получателей:

$$\sum_i A_i = \sum_j B_j.$$

В ряде случаев, если поставка i-го ресурса j-му получателю не должна превышать величины d_{ij}, то величина грузопотока x_{ij} в клетке ij должна удовлетворять условию $x_{ij} = d_{ij}$. В этом случае говорят о том, что клетка ij имеет ограничение «пропускной способности», а в левом верхнем углу клетки указывается число d_{ij}.

С учетом полученных условий необходимо найти такие неотрицательные значения величин объемов перевозок x_{ij}, при которых сумма произведений значений критерия C_{ij} на размер перевозок будет минимальной, т.е.

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} C_{ij} \cdot x_{ij} \to \min.$$

3. В исходную матрицу для решения задачи по вариантам записывают значения ресурсов и потребностей грузов и строят начальный алан любым известным способом. В матрице (табл. 3) построен начальный план базисного варианта способом наименьшего значения критерия.

Студент, подготовив начальный план перевозок, который состоит из всего набора клеток матрицы, имеющих корреспонденцию, т.е. объем перевозок от i-го поставщика к j-му получателю, должен выполнить проверку баланса по строкам и столбцам. Число базисных клеток начального плана должно быть равно: $K = m + n - 1$, где m — число строк, а n — число столбцов матрицы. Для условий нашей задачи $K = 9 + 5 - 1 = 13$. Базисные клетки помечены знаком x.

Если число базисных клеток больше K, то начальный план составлен неверно, и студенту необходимо выполнить формирование плана заново.

4. Оптимальный план перевозок на заданной матрице найти ком потенциалов последовательного улучшения начального плана.

Таблица 3

Пример построения начального плана перевозок, тыс. т

A_i	B_j									
	B_1=100	B_2=100	B_3=100	B_4=100	B_5=100	B_6=100	B_7=90	B_8=90	B_9=220	U_i
A_1=145	90	30 100 x	100	110	150	30 50 30	60 15 x	80	90	
A_2=150	10 100 x	40	45	50	25	70	30 15 30	30 20 x	10 30	
A_3=155	10 20	35	80	160	90	80	70	40	60 155 x	
A_4=150	50	5	40	30 80 x	120	40 30 x	75	30	40 20 40	
A_5=400	15	15 25	10 100 x	20 35 20	25 100 x	80 40 x	20 45 x	70 70 x	90 25 x	
V_j										

Любой допустимый план является оптимальный тогда и только тогда, когда каждой строке и каждому столбцу матрицы могут быть присвоены некоторые числа U_i и V_j, называемые потенциалами и отвечающие условиям:

$$V_j - U_i \leq C_{ij} \text{ для } x_{ij} = 0; \tag{1}$$

$$V_j - U_i = C_{ij} \text{ для } d_{ij} > x_{ij} > 0; \tag{2}$$

$$V_j - U_i \geq C_{ij} \text{ для } x_{ij} = d_{ij}, \tag{3}$$

где V_j — потенциал j-го столбца; U_i — потенциал i-й строки; C_{ij} — расстояние перевозки от i-го поставщика до j-го потребителя; x_{ij} — корреспонденция (размеры перевозок) от i-го поставщика до j-го потребителя; d_{ij} — величина пропускной способности ij клетки.

5. Присвоение потенциалов начинают со строки, в которой среди базисных клеток имеется максимальное расстояние. Этой строке можно присвоить любой положительный потенциал, например, 100. Затем, используя условие оптимальности (2), находят потенциалы остальных строк и столбцов по формулам:

$$\text{для } j\text{-го столбца } V_k = U_i + C_{ij}, \tag{4}$$

$$\text{для } i\text{-й строки } U_i = V_j - C_{ij}. \tag{5}$$

6. Условия оптимальности проверяют после присвоения всем строкам и столбцам потенциалов. Условие (1) оптимальности проверяют для всех свободных клеток, а условие (3) для всех небазисных клеток с перевозкой, равной пропускной способности. Для базисных клеток условие (2) не проверяем, так как оно выполнено по условию расчета потенциалов. В свободных клетках нарушение условия оптимальности $H_{ij} = V_j - U_i - C_{ij}$ положительное число, а в клетках с перевозкой, равной пропускной способности, оно отрицательное.

7. Улучшение допустимого плана начинают с клетки, имеющей максимальное (по модулю) нарушение на $H_{ij}^{\max}$. Для этой клетки отроят замкнутый контур, в который входят только базисные клетки и выбранная клетка с нарушением. Замкнутый контур строится следующим образом. Из выбранной клетки с нарушением проводят ломаную линию, заканчивающуюся в той же клетке, двигаясь аналогично движению шахматной ладьи, направление движения при этом изменяется под пряным углом только в базисных клетках.

Следует помнить, что для каждой клетки с нарушением существует только один контур улучшения плана. Нумерация клеток контура начинается с клетки с нарушением. Если клетка с нарушением свободная, то ей присваивается № 1. Для клеток с поставками, равными пропускной способности, нумерация начинается с нуля. Далее номера присваиваются по ходу контура. Число клеток в контуре всегда четное.

В найденном контуре определяют корреспонденцию улучшения допустимого плана на данном этапе решения. Корреспонденция улучшения плана находится из следующего выражения:

$$x_{\text{ул}} = \min\left[x_{ij\,\text{четн}},\ \left(d_{ij} - x_{ij}\right)_{\text{нечетн}}\right].$$

На величину x_{ij} изменяются все корреспонденции контура, начиная с клетки с нарушением: уменьшаются корреспонденции, записанные в четных клетках, и увеличиваются корреспонденции записанные в нечетных клетках контура.

8. Рассмотрим варианты построения корректирующих контуров. Очевидно, что возможны следующие варианты для клетки с нарушениями:

• она свободна и не имеет ограничения пропускной способности (рис. 1, *а, б*);

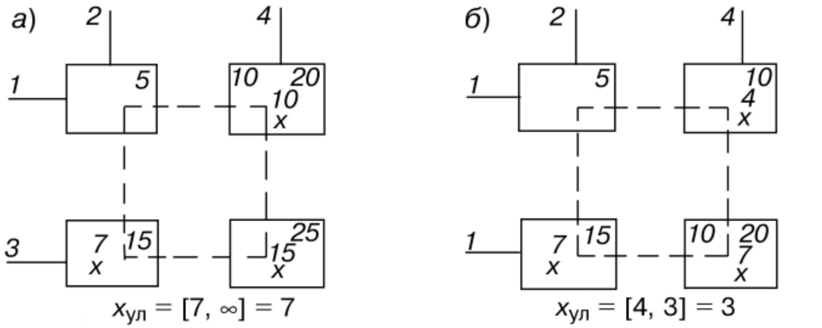

Рис. 1

• клетка свободна и имеет ограничение пропускной способности (рис. 2, *а, б*);

• клетка имеет корреспонденцию, равную ограничению пропускной способности (рис. 3, *а, б*).

На рис. 1 корректируемая клетка становится базовой вместо освобождаемой (рис. 1, *а*) или пересыщенной клетки *2–4* (рис. 1, *б*).

На рис. 2 корректируемая клетка становится пересыщенной и базовой (рис. 2, *а*) и пересыщенной, но не базовой (рис. 2, *б*).

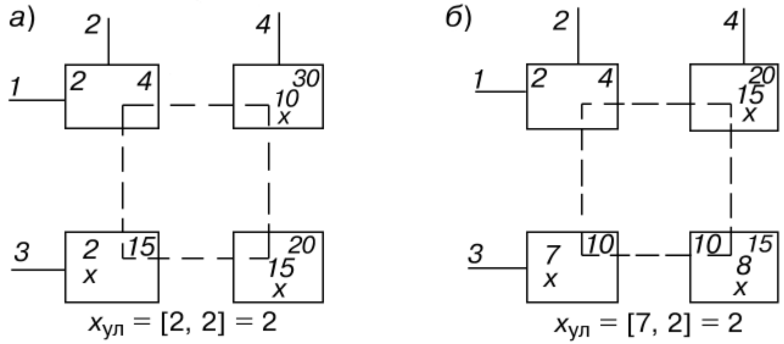

Рис. 2

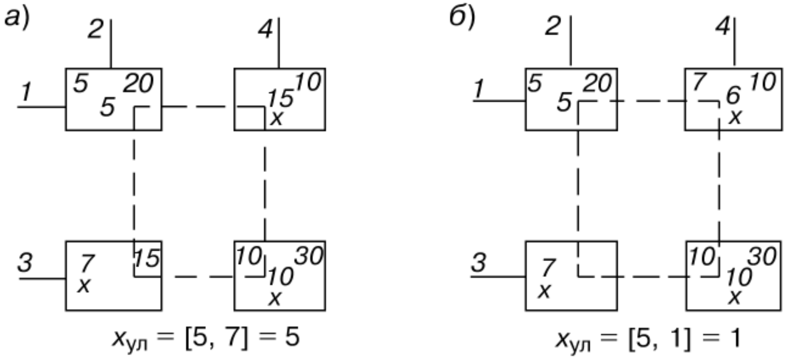

Рис. 3

На рис. 3 корректируемая клетка *1-2* освобождается (рис. 3, *а*) и становится базовой клеткой вместо клетки *1-4* (рис. 3, *б*).

9. После каждой корректировки необходимо выполнить перерасчет величин всех потенциалов матрицы и вновь проверить соблюдение условий оптимальности (1) и (3) для новых значений потенциалов.

Если необходимые клетки удовлетворяют этим условиям, то найдено оптимальное решение. В противном случае продолжить корректировку клеток с нарушением.

Пример оптимального плана перевозок представлен в матрице (табл. 4).

Таблица 4

Пример построения оптимального плана перевозок, тыс. т

A_i	B_j									
	B_1=100	B_2=100	B_3=100	B_4=100	B_5=100	B_6=100	B_7=90	B_8=90	B_9=220	U_i
A_1=145	90	30 100*x*	100	110	150	30 50 30	60	80	90 15*x*	100
A_2=150	10 10 *x*	40	45	50 40 *x*	25	70	30 15	30 90 *x*	10 30 10	140
A_3=155	10 20	35	80	160	90	80	70	40 0 *x*	60 140 *x*	130
A_4=150	50	5	40	30 40 *x*	120	40 70 *x*	75	30	40 20 40	160
A_5=400	15 90 *x*	15 25	10 100 *x*	20 35 20	25 100 *x*	80	20 90 *x*	70	90	135
V_j	150	130	145	190	160	200	155	170	190	

10. Выполнить расчет и сравнить объемы работы по перевозке грузов в тонно-километрах для начального и оптимального плана перевозок. Объем работы для оптимального плана перевозок должен быть меньше.

Задача 2

Тема. Графический метод решения задачи оптимизации производственных процессов

Простейшие задачи на отыскание экстремума линейной функции и при ограничениях типа неравенства могут быть решены геометрическими методами. Рассмотрим экономико-математическую модель, описывающую процесс возведения объекта как пример применения заявленного метода.

Для строительства путепровода необходимо подвезти готовые бетонные плиты и кирпич. Причем из требований к надежности сооружения общая масса плит должна быть не менее массы кирпича, но не более ее половины. Имеется возможность перевозить не более 1200 т груза в день. Перевозка тонны кирпича с учетом затрат на его погрузку — в два раза меньше цены перевозки тонны плит. Найти оптимальные количества материалов, при которых суммарная цена перевозки будет минимальна.

Решение. Пусть x_1 количество тонн перевезенного кирпича, а x_2 количество тонн перевезенных плит. Тогда по условию задачи составим ограничения:

$$x_1 + x_2 \leq 1200 \quad x_1 \leq 2x_1 \leq 2x_2.$$

Целевая функция имеет следующий вид: $f(x) = 2x_1 + x_2 \to \min$.

В соответствии с п. 1 изобразим три полуплоскости, которые соответствуют каждому из трех неравенств. Их пересечением является область допустимых решений — в данном случае треугольник OAB (рис. 4).

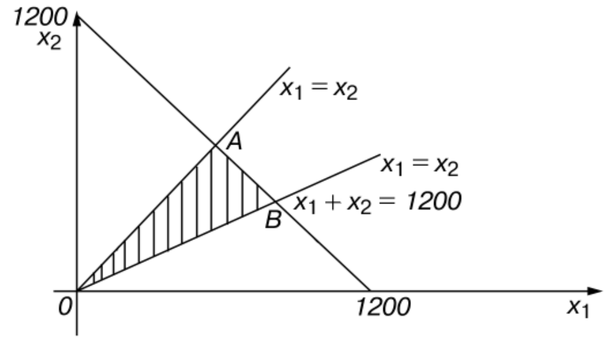

Рис. 4

Следуя п. 2, построим семейство линий уровня $2x_1 + x_2 = a$. Оптимальный план соответствует точке B. Координаты этой точки, которая является пересечением двух прямых:

$$x_1 + x_2 = 1200 \text{ и } 2x_1 = x_2,$$

можно найти, решив как систему два последних уравнения. При этом получим: x_1 = 400 т и x_2 = 800 т — оптимальный план перевозок.

Задание

Решить задачу линейного программирования графическим методом.

Варианты заданий. Номер задачи соответствует последней цифре учебного шифра. Все переменные в задачах неотрицательны.

1. Целевая функция $f(x) = x_1 - 2x_2 \to \min$.
Ограничения: $x_1 - x_2 \le 1$, $x_1 + x_2 \ge 2$, $x_1 - 2x_2 \le 0$.

2. Целевая функция: $f(x) = 2x_1 + 3x_2 \to \max$.
Ограничения: $x_1 + x_2 \le 2$, $x_1 + x_2 \le 1$.

3. Целевая функция: $f(x) = x_1 + 3x_2 \to \max$.
Ограничения: $x_1 - x_2 \le 1$, $2x_1 + x_2 \le 2$, $x_1 - x_2 \ge 0$.

4. Целевая функция: $f(x) = x_1 + x_2 \to \max$.
Ограничения: $x_1 + 2x_2 \le 10$, $x_1 + 2x_2 \ge 2$, $2x_1 + x_2 \le 10$.

5. Целевая функция: $f(x) = 2x_1 + 3x_2 \to \min$.
Ограничения: $x_1 + x_2 \le 4$, $3x_1 + x_2 \ge 4$, $x_1 + 5x_2 \ge 4$.

6. Целевая функция: $f(x) = 2x_1 - 3x_2 \to \min$.
Ограничения: $-4x_1 + 5x_2 \le 20$, $2x_1 + x_2 \ge 6$, $5x_1 - x_2 \le 45$, $x_1 - x_2 \le 6$.

7. Целевая функция: $f(x) = x_1 + 2x_2 \to \max$.
Ограничения: $-x_1 + x_2 \ge -1$, $x_1 - 2x_2 \le 1$.

8. Целевая функция: $f(x) = 5x_1 + 3x_2 \to \max$.
Ограничения: $3x_1 + 5x_2 \le 15$, $5x_1 + 2x_2 \le 10$, $x_1 - x_2 \ge 0$.

9. Целевая функция: $f(x) = x_1 + 2x_2 \to \max$.
Ограничения: $x_1 + x_2 \le 1$, $-x_1 + x_2 \ge -1$.

10. Целевая функция: $f(x) = 2x_1 + 3x_2 \to \min$.
Ограничения: $-3x_1 - 2x_2 \le -6$, $x_1 + 4x_2 \ge 4$.

11. Целевая функция: $f(x) = 3x_1 + 4x_2 \to \max$.
Ограничения: $-1 \le x_1 + 2x_2 \le 1$, $x_1 + 2x_2 \ge -1$, $-x_1 + 2x_2 \le 2$, $2x_1 - x_2 \le 2$.

12. Целевая функция: $f(x) = x_1 + x_2 \to \max$.
Ограничения: $x_1 + 2x_2 \le 1$, $2x_1 + x_2 \le 1$, $x_1 - 2x_2 \le 1$, $2x_1 - x_2 \le 1$.

13. Целевая функция: $f(x) = 6x_1 + 2x_2 \to \min$.
Ограничения: $4x_1 + x_2 \ge 21$, $2x_1 + x_2 \le 16$, $x_1 - x_2 \le 1$, $2x_1 + x_2 \le 6$, $x_1 - x_2 \ge -1$.

14. Целевая функция: $f(x) = 6x_1 + 8x_2 \to \min$.
Ограничения: $4x_1 + 14x_2 \ge 110$, $6x_1 + 5x_2 \le 85$, $25x_1 + 5x_2 \ge 110$.

15. Целевая функция: $f(x) = 6x_1 + 8x_2 \to \min$.
Ограничения: $2x_1 - x_2 \ge -1$, $-3x_1 + 2x_2 \le -9$, $10x_1 + 2x_2 \ge 44$.

16. Целевая функция: $f(x) = 2x_1 + 3x_2 \to \min$.
Ограничения: $x_1 + 2x_2 \ge 4$, $4x_1 - 2x_2 \ge 4$, $x_1 + 2x_2 \ge 6$.

17. Целевая функция: $f(x) = 3x_1 + 4x_2 \to \min$.
Ограничения: $2x_1 + 2x_2 \ge 12$, $-3x_1 + 6x_2 \ge 30$, $x_1 \ge 2$.

18. Целевая функция: $f(x) = 5x_1 + 6x_2 \to \min$.
Ограничения: $2x_1 + 7x_2 \ge 55$, $6x_1 + 5x_2 \le 85$, $5x_1 + x_2 \ge 22$.

19. Целевая функция: $f(x) = 5x_1 + 2x_2 \to \min$.
Ограничения: $5x_1 + 6x_2 \le 85$, $2x_1 + 3x_2 \le 8$, $x_1 + 5x_2 \ge 22$.

20. Целевая функция: $f(x) = 2x_1 + 3x_2 \to \min$.
Ограничения: $x_1 + x_2 \ge 7$, $x_1 - x_2 \ge -3$, $2x_1 + x_2 \ge 10$, $2x_1 - x_2 \le 2$.

21. Целевая функция: $f(x) = x_1 + 6x_2 \to \min$.
Ограничения: $x_1 - x_2 \le 1$, $-2x_1 + x_2 \le 3$, $x_1 + 2x_2 \le 32$, $x_1 + 4x_2 \ge 21$.

22. Целевая функция: $f(x) = x_1 + 4x_2 \to \min$.
Ограничения: $-4x_1 + 2x_2 \le 6$, $x_1 - x_2 \le 1$, $x_1 + 2x_2 \le 16$, $x_1 + 4x_2 \ge 21$.

23. Целевая функция: $f(x) = 4x_1 + x_2 \to \min$.
Ограничения: $-x_1 + x_2 \le 1$, $2x_1 - 4x_2 \le 6$, $2x_1 + x_2 \le 16$, $4x_1 + x_2 \ge 21$.

24. Целевая функция: $f(x) = 2x_1 + 6x_2 \to \min$.
Ограничения: $2x_1 + x_2 \le 16$, $x_1 - 2x_2 \le 3$, $2x_1 + 3x_2 \ge 13$, $-x_1 + x_2 \le 1$.

25. Целевая функция: $f(x) = 3x_1 + 4x_2 \to \min$.
Ограничения: $3x_1 + 2x_2 \ge 13$, $x_1 - x_2 \le 1$, $x_1 \le 16$, $x_2 \le 5$.

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ К ВЫПОЛНЕНИЮ ЗАДАЧИ 2

Решение задачи иллюстрируется на координатной плоскости, где по оси абсцисс откладывается x_1 а по оси ординат x_2.

1. Найдем область допустимых решений. Она является пересечением полуплоскостей, каждая из которых определяется одним из неравенств ограничений. Для получения каждой полуплоскости следует знак неравенства заменить на знак равенства. При этом будет найдено уравнение прямой — границы полуплоскости. Эта прямая разбивает плоскость на две полуплоскости. Искомую полуплоскость отмечают в соответствии

со смыслом неравенства. Если неравенство типа $x_2 \geq ax_1 + b$, то это верхняя полуплоскость, а в случае $x_2 \leq ax_1 + b$ нижняя. Пересечение всех полуплоскостей и первого квадранта является областью допустимых решений.

2. Построение опорной прямой. Для построения опорной прямой необходимо построить семейство линий равного уровня $f(x) = a$, где $f(x)$ — целевая функция. В данном случае это семейство прямых. Среди всех прямых следует выбрать ту, которая имеет хотя бы одну общую точку с найденной в предыдущем пункте областью допустимых решений и наибольшее значение параметра a, в случае задачи на максимум. В случае задачи на минимум следует выбирать ту прямую, которая соответствует минимуму параметра a.

Найденная прямая проходит через вершину многоугольника, который является областью допустимых решений. Координаты этой вершины называются оптимальным планом, а величина параметра a — оптимальным значением целевой функции.

Задача 3

Тема. Применение симплекс-алгоритма для решения экономической оптимизационной задачи управления производством

Решая оптимизационную задачу с числом свободных переменных большим трех, необходимо обращаться к симплекс-методу, позволяющему отыскать экстремум функции. Рассмотрим задачу об организации производства, обеспечивающей максимум прибыли на локомотиворемонтном заводе.

Локомотиворемонтный завод имеет три цеха, оснащенных различным оборудованием. В цехах может быть отремонтировано x_1, x_2 и x_3 локомотивов ежемесячно. Всего же направлено в ремонт 10 локомотивов. При этом за ремонт одного локомотива рабочие первого цеха получают сдельно 1 млрд руб., второго цеха — 2 млрд руб., и третьего также — 2 млрд руб. По условию договора предприятия с профсоюзом рабочим должно быть выплачено в виде заработной платы не менее 8 млрд руб.

Станковый парк предприятия ограничен, поэтому в указанные сроки у предприятия имеется всего 18 тыс. станко-часов. На ремонт одного локомотива в первом цехе требуется 1000 станко-часов, второго — 2000 станко-часов, а в третьем цехе — 4000 станко-часов. За ремонт одного локомотива в первом цехе завод получит 4 млрд руб. прибыли, во втором — 5 млрд руб. прибыли, в третьем — 3 млрд руб. прибыли. Требуется найти такой план ремонта локомотивов, при котором будет наибольшая прибыль.

Постановка задачи

Целевая функция $f(x) = 4x_1 + 5x_2 + 3x_3 \to \max$.

Ограничения: $x_1 + x_2 + x_3 = 10$, $x_1 + 2x_2 + 2x_3 \geq 8$, $x_1 + 2x_2 + 4x_3 \leq 18$.

Решение задачи симплекс-методом

1. Чтобы перейти от задачи на максимум к задаче на минимум, введем функцию $g = -f = -4x_1 - 5x_2 - 3x_3$, которую будем минимизировать с прежними ограничениями.

2. Перейдем от ограничений неравенств к ограничениям-равенствам. Для этого введем новые переменные x_4 и x_5 по следующим формулам: $x_4 = x_1 + 2x_2 + 2x_3 - 8$; $x_5 = -x_1 - 2x_2 - 4x_3 + 18$.

3. Получим следующую основную задачу линейного программирования:

$$x_1 + x_2 + x_3 = 10;$$

$$x_4 = x_1 + 2x_2 + 2x_3 - 8;$$

$$x_5 = -x_1 - 2x_2 - 4x_3 + 18;$$

$$g = -4x_1 - 5x_2 - 3x_3 \to \min.$$

4. Найдем вид канонической задачи линейного программирования. Для этого выразим в первом уравнении x_1 через другие неизвестные и подставим это его выражение во второе и третье уравнения, а также в уравнение для функции g. Получим:

$$x_1 = -x_2 - x_3 + 10;$$

$$x_4 = x_1 + 2x_2 + 2x_3 - 8 = x_2 + x_3 + 2;$$

$$x_5 = -x_1 - 2x_2 - 4x_3 + 18 = -x_2 - 3x_3 + 8;$$

$$g = -4x_1 - 5x_2 - 3x_3 = -x_2 + x_3 - 40.$$

5. Шаг симплекс-алгоритма. Из полученного выражения для целевой функции g видно, что для ее уменьшения следует увеличивать неизвестное x_2. Неизвестное x_3 увеличивать нецелесообразно, потому что это приведет к увеличению функции g. Напомним, что все неизвестные x_1 неотрицательны.

Увеличение x_2 возможно до 10 согласно первому уравнению и до 8 согласно второму. При больших значениях x_2 станут отрицательными значения x_5 и x_1. Второе ограничение не препятствует увеличению x_2. Из этого следует, что прежде проявляется второе ограничение, разрешающим элементом является число –1.

Поэтому выразим x_2 из второго ограничения и подставам его выражение в первое в третье ограничения, а также в выражение для целевой функции. Получим:

$$x_1 = -x_5 + 2x_3 + 2;$$

$$x_4 = -x_5 - 2x_3 + 10;$$

$$x_2 = -x_5 - 3x_3 + 8;$$

$$g = x_5 + 4x_3 - 48.$$

6. В выражение для функции цели g оба неизвестных входят со знаком «+». Поэтому можно утверждать, что найден оптимальный план: $x_5 = x_3 = 0$. Подставив эти значения в последнюю систему ограничений, получим и остальные неизвестные: $x_1 = 2$, $x_2 = 8$, $x_4 = 10$. Оптимальное значение функции g равно –48. Возвращаясь к интересующим нас переменным, можно утверждать, что не следует производить ремонт в третьем цехе, в первом следует ремонтировать 2, а во втором 8 локомотивов. При этом прибыль будет равна 48 млрд руб.

Задание

Найти оптимальное значение функции при системе ограничений.

Варианты заданий. Номер задачи соответствует номеру в списке группы. Все переменные в задачах неотрицательны.

1. Целевая функция $f(x) = 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 \to \max$.
Ограничения: $x_1 + x_2 + x_3 = 10$, $x_1 + 2x_2 + 2x_3 \geq 8$, $x_1 + 2x_2 + 4x_3 \leq 18$.
2. Целевая функция $f(x) = x_1 + 2x_2 + 5x_3 \to \max$.
Ограничения: $4x_1 + x_2 + x_3 = 20$, $2x_1 + x_2 + x_3 \geq 5$, $x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 24$.
3. Целевая функция $f(x) = 2x_1 + x_2 + 5x_3 \to \min$.
Ограничения: $x_1 + x_2 + x_3 = 30$, $2x_1 + x_2 + 4x_3 \geq 12$, $x_1 - 2x_2 + 3x_3 \leq 40$.
4. Целевая функция $f(x) = 2x_1 + x_2 + 3x_3 \to \min$.
Ограничения: $x_1 + x_2 + x_3 = 8$, $x_1 - x_2 + x_3 \geq -1$, $x_1 + x_2 - x_3 \leq 10$.
5. Целевая функция $f(x) = x_1 + 2x_2 + x_3 \to \min$.
Ограничения: $x_1 + x_2 + x_3 = 12$, $2x_1 - x_2 + x_3 \geq -2$, $x_1 + 2x_2 - 4x_3 \leq 8$.
6. Целевая функция $f(x) = x_1 - 4x_2 + 2x_3 \to \max$.
Ограничения: $x_1 + 2x_2 + x_3 = 20$, $2x_1 + x_2 - x_3 \geq 10$, $x_1 - x_2 + 2x_3 \leq 25$.
7. Целевая функция $f(x) = x_1 + 2x_2 - 3x_3 \to \max$.
Ограничения: $x_1 + x_2 + x_3 = 25$, $2x_1 - 3x_2 + 3x_3 \geq 10$, $x_1 - 3x_2 + 4x_3 \leq 30$.
8. Целевая функция $f(x) = x_1 + x_2 + 2x_3 \to \min$.
Ограничения: $x_1 + 2x_2 + x_3 = 30$, $x_1 - x_2 + 2x_3 \geq 10$, $x_1 + 3x_2 + 4x_3 \leq 50$.
9. Целевая функция $f(x) = x_1 + 3x_2 - x_3 \to \min$.
Ограничения: $x_1 + x_2 + x_3 = 10$, $x_1 + 2x_2 - x_3 \geq -2$, $x_1 + 2x_2 + 2x_3 \leq 12$.
10. Целевая функция $f(x) = x_1 + x_2 + 2x_3 \to \min$.
Ограничения: $2x_1 + x_2 + x_3 = 16$, $x_1 + 2x_2 - 2x_3 \geq 10$, $x_1 - 2x_2 - 2x_3 \leq 12$.
11. Целевая функция $f(x) = 4x_1 + 5x_2 + 3x_3 \to \min$.
Ограничения: $x_1 + x_2 + x_3 = 10$, $x_1 + 2x_2 + 2x_3 \geq 8$, $x_1 + 2x_2 + 4x_3 \leq 18$.

12. Целевая функция $f(x) = x_1 + 3x_2 - x_3 \to \min$.
Ограничения: $x_1 + x_2 + x_3 = 10$, $x_1 + 2x_2 - 2x_3 \ge -2$, $x_1 + 2x_2 + 2x_3 \le 12$.

13. Целевая функция $f(x) = x_1 + x_2 + 2x_3 \to \min$.
Ограничения: $x_1 + 2x_2 + x_3 = 30$, $x_1 - x_2 + 2x_3 \ge 10$, $x_1 + 3x_2 + 4x_3 \le 50$.

14. Целевая функция $f(x) = x_1 + 2x_2 + 5x_3 \to \min$.
Ограничения: $x_1 + x_2 + x_3 = 20$, $2x_1 + x_2 + x_3 \ge 5$, $x_1 + x_2 + 2x_3 \le 24$.

15. Целевая функция $f(x) = x_1 + x_2 + 2x_3 \to \min$.
Ограничения: $2x_1 + x_2 + x_3 = 16$, $x_1 + 2x_2 - 2x_3 \ge 10$, $x_1 - 2x_2 - 2x_3 \le 12$.

16. Целевая функция $f(x) = 2x_1 + x_2 + 5x_3 \to \min$.
Ограничения: $4x_1 + x_2 + x_3 = 30$, $2x_1 + x_2 + 4x_3 \ge 12$, $x_1 - 2x_2 + 3x_3 \le 40$.

17. Целевая функция $f(x) = x_1 - 4x_2 + 2x_3 \to \min$.
Ограничения: $x_1 + 2x_2 + x_3 = 20$, $2x_1 + 2x_2 - x_3 \ge 10$, $x_1 - x_2 + 2x_3 \le 25$.

18. Целевая функция $f(x) = x_1 + 2x_2 - 3x_3 \to \min$.
Ограничения: $x_1 + x_2 + x_3 = 25$, $2x_1 - 3x_2 + 3x_3 \ge 10$, $x_1 - 3x_2 + 4x_3 \le 30$.

19. Целевая функция $f(x) = x_1 + 2x_2 - x_3 \to \min$.
Ограничения: $x_1 + 2x_2 + x_3 = 12$, $2x_1 - x_2 + x_3 \ge -2$, $x_1 + 2x_2 - 4x_3 \le 8$.

20. Целевая функция $f(x) = 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 \to \min$.
Ограничения: $x_1 + x_2 + x_3 = 10$, $3x_1 + 2x_2 + 4x_3 \ge 8$, $x_1 + 2x_2 + 4x_3 \le 18$.

21. Целевая функция $f(x) = 2x_1 + x_2 - x_3 \to \min$.
Ограничения: $x_1 + x_2 + x_3 = 8$, $x_1 - x_2 + x_3 \ge -1$, $x_1 + x_2 - x_3 \le 10$.

22. Целевая функция $f(x) = 2x_1 + x_2 + 3x_3 \to \min$.
Ограничения: $x_1 + x_2 + x_3 = 2$, $x_1 + 2x_2 + 3x_3 \ge 3$, $2x_1 + x_2 + 2x_3 \le 6$.

23. Целевая функция $f(x) = 2x_1 + x_2 + 3x_3 \to \min$.
Ограничения: $x_1 + x_2 + x_3 = 21$, $x_1 - x_2 + 2x_3 \ge 15$, $x_1 + 2x_2 - x_3 \le 43$.

24. Целевая функция $f(x) = 2x_1 + 10x_2 - 2x_3 \to \min$.
Ограничения: $x_1 + x_2 + x_3 = 11$, $x_1 - x_2 + 2x_3 \ge 5$, $x_1 + 2x_2 - x_3 \le 23$.

25. Целевая функция $f(x) = 3x_1 + 4x_2 + 6x_3 \to \max$.
Ограничения: $x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 10$, $x_1 + 4x_2 + 6x_3 \ge 8$, $x_1 + 4x_2 + 6x_3 \le 18$.

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧИ 3

Эту задачу следует решать с помощью симплекс-метода [1].

1. **Переход от ограничений типа неравенств к ограничениям типа равенств.** Для этого нужно перенести все члены из меньших частей неравенств в большие и обозначить последние новыми неизвестными (они, естественно, будут неотрицательными). Бели в задаче были, в том числе, и ограничения типа равенства, то на этом этапе они остается без изменений. Полученная новая задача называется общей задачей линейного программирования.

2. **Переход к канонической задаче линейного программирования.** На этом этапе следует выразить базисные неизвестные через свободные. Число базисных неизвестных равняется числу ограничений, все остальные неизвестные называется свободными. Целевую функцию также следует выразить через свободные неизвестные. На этом этапе следует добиваться, чтобы при нулевых значениях свободных неизвестных базисные были положительными. Все задачи 1–10 подобраны таким образом, что сделать это несложно. Общий алгоритм получения допустимого базисного решения описан в [1].

3. **Нахождение оптимального решения с помощью симплекс-алгоритма.**

3.1. Если дана задача на максимизацию целевой функции f, то она сводится к задаче на минимизацию функции $-f$.

3.2. Проверка оптимальности базисного решения. Если в целевую функцию свободные неизвестные входят с неотрицательными коэффициентами для минимальности функции следует принять эти неизвестные нулями, потому что они неотрицательны, и сделать функцию цели меньше, чем при таком варианте, невозможно.

3.3. **Нахождение разрешающего элемента.** Если же какой-либо из коэффициентов при свободном неизвестном в целевой функции отрицателен, то функцию можно пытаться уменьшить путем увеличения этого неизвестного. При этом его можно увеличивать до тех пор, пока в каком-либо из ограничений базисное неизвестное не станет равным нулю, т.е. перейдет в число свободных. Следует найти то ограничение, которое в меньшей степени позволяет увеличивать свободное неизвестное. Коэффициент при нем в этом ограничении называется разрешающим элементом.

3.4. **Шаг симплекс-алгоритма.** Следует выразить варьируемое — свободное неизвестное через другие свободные и базисное из ограничения с разрешающим элементом. Полученное уравнение будет новым ограничением, прежнее ограничение следует удалить. Остальные ограничения следует изменить следующим образом: вместо свободного переменного следует подставить его выражение через базисное из нового ограничения. Аналогично следует заменить это свободное неизвестное его выражением и в целевой функции. При этом если приравнять нулю новые свободные переменные, то значение целевой функции уменьшится.

3.5. **Критерий остановки в симплекс-алгоритме.** Шаги симплекс-алгоритма следует делать до тех пор, пока не будет ситуации описанной в п. 3.2, когда все коэффициенты при неизвестных в целевой функции не станут положительными.

3.6. **Ответ в симплекс-методе.** После остановки в симплекс-алгоритме следует приравнять нулю свободные неизвестные, и из ограничений найти базисные неизвестные. Последнее значение целевой функции и является оптимальным.

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА №2

Задача 1

Тема. Метод динамического программирования для выбора оптимального профиля пути

Задание

Требуется найти оптимальную трассу участка железнодорожного пути между пунктами А и В, из которых второй лежит к северо-востоку от первого. Местность, по которой пройдет магистраль, является пересеченной и включает лесистые зоны, холмы, болота, реку. Поэтому стоимость строительства равных по длине участков пути может быть различной. Требуется так провести дорогу из пункта А в пункт В, чтобы суммарные затраты на сооружение участка были минимальны.

План прокладки пути разобьем на ряд возможных шагов, на каждом из которых стоимость строительства известна (рис. 5). Каждый шаг строительства является прокладкой пути между двумя рядом расположенными узлами. На рис. 5 все узлы пронумерованы, а в табл. 5 в соответствии с номером варианта (предпоследняя цифра учебного шифра) дана стоимость сооружения элемента пути между узлами.

5	11	17	23	29	35	41	В
4	10	16	22	28	34	40	46
3	9	16	21	27	33	39	45
2	8	14	20	26	32	38	44
1	7	13	19	25	31	37	43
А	6	12	18	24	30	36	42

Рис. 5

Таблица 5

Отрезки	Варианты										
	x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**
А-1	10	10	29	15	14	39	38	14	48	12	10
А-6	13	14	10	9	11	10	10	8	10	13	10
1-2	13	12	23	11	11	12	12	11	11	14	11
1-7	12	12	15	12	15	11	11	12	13	15	13
2-3	11	11	8	13	8	10	10	15	13	9	15
2-8	7	8	11	8	17	14	10	10	12	10	10
3-4	10	10	10	7	10	13	11	14	10	10	8
3-9	9	10	28	15	10	10	13	13	10	11	10
4-5	11	11	14	10	15	11	14	9	18	12	12
4-10	13	8	13	11	13	12	12	9	10	13	14
5-11	10	10	8	16	8	18	12	10	11	13	15
6-7	9	13	10	38	8	10	11	9	8	9	10
6-12	10	14	11	8	10	11	13	10	8	8	12
7-8	12	14	14	10	11	11	11	10	19	9	13
7-13	10	10	8	11	11	10	12	13	13	12	14
8-9	9	15	13	28	12	37	13	12	12	12	10
8-14	13	10	12	12	11	48	13	11	12	11	11
9-Ю	12	13	10	11	15	14	14	12	11	12	12
9-15	13	12	11	12	8	15	15	12	13	13	13
10-11	9	12	15	15	8	8	8	10	10	9	10
10-16	13	9	10	9	10	10	9	8	11	10	11
11-17	39	69	89	48	11	51	10	9	9	68	39
12-13	27	12	11	10	12	10	11	12	8	10	8
12-18	12	13	13	13	12	12	13	11	10	8	11
13-14	11	11	12	61	11	12	12	10	11	29	10
13-19	10	15	14	11	10	10	11	12	12	10	48
14-15	13	12	10	15	8	11	10	9	13	15	14
14-20	12	11	9	14	7	16	12	8	14	14	10
15-16	27	11	11	11	15	13	15	8	10	12	12
15-21	10	13	10	10	14	14	16	10	11	13	12
16-17	47	10	10	10	11	11	11	13	10	11	14
16-22	12	14	9	9	11	10	13	12	79	10	10
17-23	48	10	15	78	10	12	14	11	88	10	49
18-19	10	12	13	14	8	14	11	10	14	13	11

Продолжение табл. 5

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
18-24	14	12	11	10	9	13	10	11	14	12	59
19-20	11	10	10	10	12	11	12	8	8	11	68
19-25	11	13	88	18	38	to	13	10	10	88	10
20-21	11	14	7	15	10	8	14	10	10	9	11
20-26	12	13	11	12	11	10	11	9	9	10	12
21-22	10	15	12	17	10	12	10	9	8	13	12
21-27	12	10	13	8	13	12	11	13	13	14	13
22-23	8	10	10	10	8	13	12	14	14	13	11
22-28	9	10	9	10	12	14	14	11	11	12	11
23-29	15	8	9	9	13	13	15	12	12	11	10
24-25	8	11	8	8	8	12	10	13	14	10	12
24-30	10	10	10	15	10	10	11	14	13	13	14
25-26	9	12	12	11	11	14	12	15	10	14	12
25-31	7	15	15	11	9	11	13	10	8	12	10
26-27	11	15	10	10	7	14	14	8	8	10	9
26-32	8	16	9	12	14	13	15	9	10	9	10
27-28	10	10	7	14	13	10	16	10	9	8	15
27-33	9	8	8	11	13	7	8	12	12	8	14
28-29	10	10	11	15	12	8	9	13	13	10	15
28-34	9	9	9	13	10	11	9	14	14	14	15
29-35	7	9	10	12	8	10	10	10	11	13	12
30-31	8	10	15	12	9	13	12	10	11	11	10
30-36	7	14	14	13	11	12	10	11	10	11	10
31-32	12	11	11	9	12	11	12	12	12	12	9
31-37	8	12	11	8	11	10	11	13	12	10	8
32-33	8	12	8	10	10	8	9	10	10	10	8
32-38	5	10	10	10	10	8	9	11	11	8	12
33-34	5	10	8	11	10	11	8	11	10	9	12
33-39	8	10	10	8	11	10	10	11	9	10	11
34-35	6	12	12	7	11	12	12	10	12	7	10
34-40	7	12	11	13	10	12	11	9	12	8	9
35-41	14	11	11	14	9	11	15	8	8	8	8
36-37	13	12	13	12	8	15	14	8	10	9	10
36-42	12	13	14	12	7	14	10	10	13	10	10
37-38	11	10	8	9	6	10	12	9	11	10	10
37-43	10	10	7	10	13	13	11	11	13	13	13

Окончание табл. 5

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
38-39	12	9	10	10	12	13	10	12	12	12	12
38-44	8	10	12	12	11	1T	8	13	14	12	13
39-40	9	9	13	11	8	10	9	14	13	13	10
39-45	6	9	10	11	8	10	10	14	10	10	15
40-41	8	13	10	13	10	8	14	13	10	15	11
40-46	7	14	9	8	11	9	12	10	15	11	12
41-B	7	10	8	7	13	10	13	15	14	10	13
42-43	12	15	8	17	13	10	10	9	15	13	10
43-44	11	12	10	15	15	13	13	8	10	10	15
44-45	7	11	11	10	14	14	12	8	15	15	15
45-46	8	8	12	13	11	12	12	10	11	11	10
46-B	7	14	15	13	10	10	13	14	13	10	10

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧИ 1

Эту задачу следует решить *методом динамического программирования*, последовательно двигаясь от конца трассы к ее началу, при этом на каждом шаге процесса выбирая то направление трассы, которое дает меньшую стоимость ее строительства от рассматриваемого пункта до пункта B. Подробное применение этого метода показано на следующем примере.

Пример. Решим вариант, отмеченный в табл. 5 знаком «*x*». Решение начнем с конца прокладываемой трассы. Рассмотрим точку B и три окружающие ее точки (рис. 6).

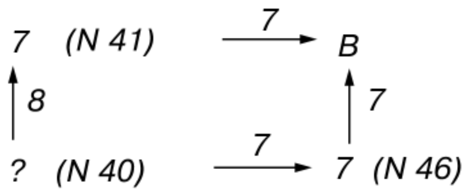

Рис. 6

Из рис. 6 следует, что в случае попадания трассы в пункт № 46 придется затратить дополнительно 7 млрд руб., чтобы достроить ее до пункта B. То же относится и к пункту № 41. Возникает вопрос, каким образом вести трассу от пункта № 40? Если ее вести через пункт № 41, то будет затрачено 8 + 7 = 15, а если через пункт № 46, то 7 + 7 = 14. Последнее выгоднее. Поэтому в случае попадания трассы в пункт № 40 придется затратить дополнительно 14 млрд руб., чтобы достроить ее до пункта B. Продолжим процесс решения задачи. Рассмотрим дополнительно пункты №№ 33, 34, 35, 39 и 45 (рис. 7).

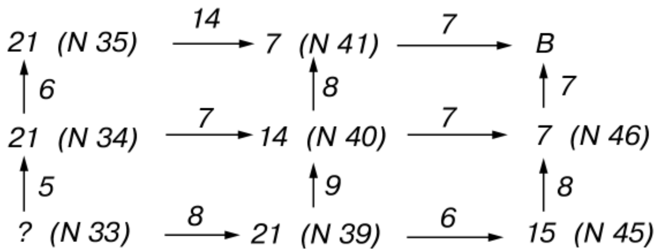

Рис. 7

Единственный возможный путь трассы из пункта № 45 ведет через пункт 7, поэтому стоимость строительства трассы от пункта № 45 до B составит 8 + 7 = 15. Аналогично стоимость строительства трассы до B из пункта № 35 составит 7 + 14 = 21, Чтобы найти минимальную стоимость строительства трассы из пункта № 33, следует сравнить варианты ее проложения через пункты № 34 и 39. В первом случае получим 5 + 21 = 26, а во втором 8 + 21 = 29. Выберем более рациональный первый вариант и погашаем над этим пунктом цифру 26. Далее следует рассматривать последовательно пункты №№ 29, 28, 27. Затем пункты №№ 44, 38, 32. Потом обработать пункт № 26 и так далее. В конце все узлы будут пронумерованы, что приведет к решению задачи. На рис. 8 показан окончательный вид таблицы.

Здесь малыми цифрами показаны стоимости прокладки трассы между отдельными пунктами (исходные данные таб-

70	*10*	60	*9*	51	*8*	43	*15*	28	*7*	21	*14*	7	*7*	B
11		*9*		*7*		*8*		*10*		*6*		*8*		*7*
77	*13*	64	*13*	51	*123*	9	*9*	30	*9*	21	*7*	14	*7*	7
10		*12*		*7*		*10*		*10*		*5*		*9*		*8*
79	*9*	70	*13*	57	*10*	47	*123*	5	*9*	26	*8*	21	*6*	15
11		*9*		*13*		*11*		*11*		*8*		*12*		*7*
86	*7*	79	*13*	66	*12*	54	*12*	42	*8*	34	*5*	30	*8*	22
13		*12*		*11*		*11*		*9*		*12*		*11*		*11*
94	*12*	82	*10*	72	*10*	62	*11*	51	*7*	46	*8*	41	*10*	33
10		*9*		*7*		*10*		*8*		*8*		*13*		*12*
A(102)	*13*	89	*10*	79	*12*	72	*14*	59	*10*	54	*7*	54	*12*	45

Рис. 8

лицы вариантов 5), большими цифрами показаны рассчитанные методом динамического программирования минимальные стоимости прокладки трассы от данного пункта до пункта В. Чтобы найти оптимальную трассу следует, последовательно двигаясь от пункта А, прокладывать ее в том направлении, в котором число исходного пункта равняется числу соседнего плюс стоимость строительства пути между ними, указанное на рис. 8 малым шрифтом. Например, сначала следует двигаться от А вправо, потому что 102 = 89 +13. Окончательный вид трассы показан на рис. 9.

5	11	17	23	29	35	41	B
4	10	16	22	28	34	40	46
3	9	15	21	27	33	39	45
2	8	14	20	26	32	38	44
1	7	13	19	25	31	37	43
A	6	12	18	24	30	36	42

Рис. 9

Задача 2

Тема. Задача оптимального распределения ресурсов

Задание

Предприятие имеет свободных K млрд руб. средств, которые оно может вложить в пять различных производственных

программ. При этом прибыль от каждой из программ зависит от объема инвестиций. Эти зависимости f_1 известны и имеют следующий вид:

$$f(x) = bx - ax^2 \quad \text{и конкретно:}$$

$$f_1(x_1) = 0{,}18x_1 - 0{,}05x_1^2;$$

$$f_2(x_2) = 0{,}16x_2 - 0{,}04x_2^2;$$

$$f_3(x_3) = 0{,}14x_3 - 0{,}02x_3^2;$$

$$f_4(x_4) = 0{,}12x_4 - 0{,}02x_4^2;$$

$$f_5(x_5) = 0{,}1x_5 - 0{,}01x_5^2 \text{ млрд руб.},$$

где x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 — инвестиции в программы, млрд руб. Их общий объем $K = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5$ задан в табл. 6. (Номер варианта соответствует предпоследней цифре учебного шифра)

Таблица 6

Номер варианта	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
Объем инвестиций, млрд руб.	6	6,5	7	7,5	8	8,5	9	9,5	10	10,5

Требуется найти неотрицательные объемы инвестиций x_1, x_2, x_3, x_4 и x_5 соответствующие наибольшей общей прибыли

$$П = f_1(x_1) + f_2(x_2) + f_3(x_3) + f_4(x_4) + f_5(x_5).$$

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧИ 2

Эту задачу можно решить методами математического анализа. Однако это приведет к рассмотрению большого числа вариантов. Поэтому следует предварительно отбросить заведомо неоптимальные варианты. Заметим, что коэффициенты при x убывают с возрастанием номера функции прибыли. Это говорит о том, что при малых объемах инвестиций первая программа имеет преимущество перед второй, вторая — перед третьей, третья — перед четвертой, а четвертая — перед пятой. При значительных объемах инвестиций эти приоритеты могут измениться, но не может быть такой ситуации, при которой программа с меньшим номером может быть не профинансирована, в то время когда программа с большим порядковым номером будет проинвестирована. Поэтому возможны следующие варианты: 1. Все средства передаются первой программе; 2. Средства распределяются между первой и второй программами; 3. Средства распределяются между первой, второй и третьей программами; 4. Средства распределяются между первой, второй, третьей и четвертой программами; 5. Средства распределяются между первой, второй, третьей, четвертой и пятой программами.

Рассмотрим общий для всех этих вариантов случай с n первыми программами. Из уравнения связи $K = x_1 + \ldots + x_n$ выразим последнее неизвестное и подставим его в функцию прибыли П. Получим:

$$П = f_1(x_1) + \ldots + f_{n-1}(x_{n-1}) + f_n(K - x_1 - \ldots - x_{n-1}) \to \max.$$

Для нахождения минимума функции n–1 переменной П, приравняем к нулю все ее частные производные. Из этих уравнений получим, что в точке максимума все производные от функций f_i по своим аргументам одинаковы. Поэтому

$$b_1 - 2a_1x_1 = b_2 - 2a_2x_2 = \ldots = b_n - 2a_nx_n. \qquad (1)$$

Эти n уравнений вместе с условием $K = x_1 + \ldots + x_n$ дают линейную систему, которую нетрудно решить.

Сделав пять таких расчетов, мочено получить 5 значений функции П, наибольшее из которых является оптимальным значением прибыли, а соответствующие ей $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — оптимальным планом инвестиций.

Пример. Пусть $K = 5$. Обозначим значение правой части уравнения (1) как t и выразим все переменные через него. Получим: $x_i = (b_i - t)/2a_i$. Подставив найденные выражения для x_i в формулу для прибыли П, после преобразований получим

$$П_{\text{опт}} = t^2 \big/ \left[4\left(1/a_1 + 1/a_2 + \ldots + 1/a_n\right)\right]. \qquad (2)$$

Рассчитаем все 5 вариантов:
1) $П_1 = 0{,}18 \cdot 5 - 0{,}05 \cdot 5^2 = -0{,}35$ убыточно.
2) $П_2 = 0{,}032$; $x_1 = 2{,}33$; $x_2 = 2{,}66$.
3) $П_3 = 2{,}66 \cdot 10^{-6}$.
4) $П_4 = 3{,}3 \cdot 10^{-6}$.
5) $П_5 = 2{,}9 \cdot 10^{-5}$.

Поэтому оптимальный план инвестиций получится согласно третьему случаю $x_1 = 2{,}3333$ млрд руб., $x_2 = 2{,}6666$ млрд руб.

Задача 3

Тема. Метод экспертных оценок для отбора кандидата из кадрового резерва на должность руководителя

Задание

1. В связи с высокими требованиями, предъявляемыми к личностным свойствам руководителей, для эффективной работы в коллективе возникает потребность профессионального отбора на конкурсной основе. С этой целью осуществляется предварительная оценка профессиональной пригодности кандидата на руководящую должность. Требуется методом экспертного ранжирования из группы кадрового резерва, включающего в себя семь кандидатов, отобрать наиболее достойного, по мнению коллектива, из 10 экспертов.

2. После коллективного ранжирования экспертами степени подготовленности и личностных свойств всех представителей группы кадрового резерва и выбора лучшего из них определить степень согласованности мнений группы экспертов.

Исходные данные

Каждый $Э_j$ эксперт оценивает степень подготовленности каждого члена группы кадрового резерва, сопоставив ему целое число — его ранг k_{ij}, т.е. номер члена группы в порядке убывания оценки степени подготовленности. Первый ранг имеет тот, кто, по мнению эксперта, подготовлен лучше других, второй — менее подготовлен, но лучший из оставшихся. Распределения рангов даны в табл. 1.

Таблица 1

Индивидуальные оценки экспертами подготовленности кандидатов из группы резерва

Номер члена группы	Номер эксперта									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	7	5	1	5	2	3	4	7	7	7
2	4	1	3	1	1	1	1	3	2	5
3	5	6	2	2	5	2	2	1	4	2
4	1	4	4	7	3	5	3	5	3	3
5	6	2	6	4	4	4	5	4	1	4
6	3	7	7	3	6	7	6	2	5	1
7	2	3	5	6	7	6	7	6	6	6

Принято, что эксперты отличаются уровнем компетентности, которую можно оценить вероятностью получения экспертом достоверной оценки. Тогда каждый эксперт получает весовой коэффициент, значение которого лежит в пределах $0 < a_j \le 1$ для i-го эксперта. Значения весовых коэффициентов заданы в табл. 2 по вариантам.

Таблица 2

Уровни компетентности экспертов

Эксперт	Вариант (последняя цифра учебного шифра)									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0,9	0,5	0,7	0,9	0,8	0,7	0,5	0,9	0,8	0,7
1	0,5	0,9	0,8	0,6	0,7	0,6	0,9	0,8	0,7	0,6
2	0,7	0,8	0,9	0,7	0,5	0,9	0,5	0,7	0,6	0,8
3	0,9	0,6	0,7	0,9	0,7	0,5	0,7	0,6	0,8	0,9
4	0,8	0,7	0,6	0,7	0,9	0,7	0,6	0,8	0,9	0,6
5	0,7	0,5	0,9	0,5	0,7	0,9	0,8	0,9	0,6	0,5
6	0,6	0,9	0,5	0,7	0,6	0,8	0,9	0,6	0,5	0,7
7	0,9	0,8	0,7	0,6	0,8	0,9	0,6	0,9	0,7	0,9
8	0,8	0,7	0,6	0,8	0,9	0,6	0,5	0,7	0,9	0,5
9	0,7	0,6	0,8	0,9	0,6	0,5	0,7	0,9	0,5	0,9

Таблица 3

Номер эксперта по вариантам

Вариант (предпоследняя цифра учебного шифра)	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Номер эксперта	7	8	9	0	6	5	4	3	2	1
	1	3	2	7	4	8	9	7	3	6

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ К ВЫПОЛНЕНИЮ ЗАДАЧИ 2

1. Для решения задачи составим матрицу мнений экспертов в виде табл. 4, где дан пример заполнения исходных данных. Студент в эту таблицу вносит по своему варианту данные из табл. 2 об уровне компетентности, а из табл. 1 выбирает два столбца распределения рангов тех двух экспертов, которые заданы по вариантам табл. 3 и заменяет ими соответствующие два столбца экспертов в табл. 1.

2. В таблице по каждому $Э_j$ столбцу x_i числу из группы резерва присваивается k_{ij}-ранг — целое число от 1 до n.

Получаем матрицу мнений экспертов размерностью $N \times n$, в которой сумма элементов любого столбца равна

$$\sum_{i=1}^{n} k_{ij} = \sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}.$$

3. Наиболее подготовленного кандидата из группы на основе коллективной оценки выбирают после расчета среднего ранга для каждого из кандидатов:

$$\overline{h_i} = \frac{\sum_{j=1}^{N} k_{ij} a_j}{\sum_{j=1}^{N} a_j},$$

где a_j — уровень $j = 1$ компетентности эксперта; $j = 1, 2, ..., 10$.

Средние ранги позволяют проранжировать кандидатов, т.е. выявить наиболее подготовленных. На первом месте будет кандидат, имеющий минимальный ранг, что будет соответствовать усредненному мнению коллектива из N экспертов.

4. Не всякий результат экспертного опроса можно считать удовлетворительным. Если мнения экспертов сильно расходятся: один эксперт присвоит x_i кандидату первый ранг, а другой значение последнего ранга, то такое ранжирование не может быть положено в основу выбора первого кандидата в отличие от других. Поэтому необходимо ввести процент достоверности, т.е. согласованности экспертов.

5. Согласованность экспертов удобно определять степенью рассеянности средних рангов $\overline{k_i}$. Если мнения экспертов совпадают, то ранги есть целые, не равные друг другу числа (в нашем случае не рассматривается вариант наличия одинаковых рангов). При частично согласованных мнениях ранги сориентируются вокруг среднего значения $n/2$.

6. Степень рассеяния определим с помощью дисперсии средних рангов

$$D(\overline{k}) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\overline{k_i} - M(\overline{k})\right)^2,$$

где $\overline{k_i}$ — средний ранг для i-го кандидата:

$$k_i = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} k_{ij};$$

$M(k)$ — математическое ожидание среднего ранга:

$$M(\overline{k}) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} k_i = \frac{n+1}{2}.$$

В табл. 4 для краткости обозначений принято:

$$\Delta k_i = \overline{k_i} - M(\overline{k}).$$

При полном совпадении мнений экспертов дисперсия имеет максимальное значение

$$D_{\max} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(i - \frac{n+1}{2}\right)^2 = \frac{n^2-1}{12}.$$

Таблица 4

Расчет коэффициента согласованности

Номер члена группы	Оценка эксперта										$\overline{h_i}$	k_i	Ранг кандидата
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9			
1	4	3	4	4	4	5	4	1	3	1			
2	7	7	5	7	7	6	7	7	4	7			
3	5	4	3	3	2	3	3	3	7	3			
4	3	6	7	6	5	7	6	6	6	6			
5	6	1	2	1	3	2	2	2	1	2			
6	2	3	6	5	6	4	5	5	5	4			
7	1	2	1	2	1	1	1	4	2	5			
Уровень компетентности a_j	0,8	0,9	0,7	0,6	0,5	0,8	0,7	0,8	0,9	0,7			

7. Критерий согласованности экспертов представим в виде отношения

$$W = \frac{D(\overline{k})}{D_{\max}} = \frac{12}{n(n^2-1)}\sum_{i=1}^{n}\left(\overline{k_i} - \frac{n+1}{2}\right)^2.$$

Очевидно, что $0 \le N \le 1$. При $W = 0$ мнения экспертов полностью расходятся, а при $W = 1$ они высказываются единодушно. Таким образом, величина W есть характеристика степени согласованности экспертов.

Полученный результат показывает, что мнения экспертов согласованы достаточно хорошо.

8. Конкретное значение критерия согласованности в диапазоне между нулем и единицей содержательно определяется следующим образом. Предположим, что N экспертов абсолютно компетентны, а остальные $(N - m)$ нет, т.е. принимают свое решение совершенно случайно (что, естественно, только допущение). Тогда дисперсия средних рангов будет образована суммой

$$D(\overline{k}) = \frac{1}{N}\left[mD_{\max} + (N-n)\cdot 0\right] = \frac{mD_{\max}}{N}.$$

Разделив на D_{max} получаем $W = m/N$. Это говорит о том, что W зависит от числа абсолютно компетентных экспертов в соответствии с нашим предположением. Так, при W = 0,4 можно считать, что 40% экспертов были вполне компетентны, а остальные 60% приникали свое решение случайно. Последнее могло оказать, а могло и не оказать своего влияния на окончательное ранжирование.

9. По данным табл. 4 коэффициент согласованности как мера достоверности суждений экспертов равен

$$W = \frac{12 \cdot 22{,}337}{7(49-1)} = 0{,}79.$$

Задача 4

Тема. Метод экстраполяции динамического ряда

На основе данных статистических наблюдений можно находить прогнозные показатели для интересующих экономических показателей. Для решения таких задач применяют метод наименьших квадратов.

Задание

Установить параметры линейной однофакторной модели расчета потребности в трудовых ресурсах, которые потребуются при росте использования оборудования за установленный период времени до 90% его мощности.

Исходные данные

В табл. 1 дан временной ряд роста численности обслуживающего персонала установленного оборудования. Вариант исходных данных выбирается по последней цифре учебного шифра студента.

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

Экстраполяция динамического ряда производится по уравнению прямой:

$$y = a + bt,$$

где y — необходимое количество рабочих; t — порядковый номер динамического ряда; a, b — параметры уравнения.

Таблица 1

Исходные данные

t	Вариант (по последней цифре учебного шифра)									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
1	1	4	2	3	2	3	2	4	3	2
2	3	7	5	6	4	5	6	7	5	5
3	5	10	8	10	8	9	10	8	7	8
4	7	11	3	8	4	5	12	6	5	2
5	9	15	13	14	12	14	13	11	10	13
6	12	18	16	18	16	18	17	15	14	17
7	15	20	19	20	17	20	21	18	17	20
8	14	22	20	21	20	21	22	19	18	21
9	18	25	23	24	21	22	25	21	14	24
10	20	28	25	25	23	25	27	24	21	27
11	23	30	27	27	24	26	29	26	24	30
12	28	33	31	30	27	27	30	28	25	34
13	30	35	34	33	30	31	34	30	27	35
14	35	37	36	35	34	34	35	31	30	37
15	37	39	38	36	35	36	38	34	32	39

Задача состоит в определении уровня динамического ряда за пределами взятого базисного периода через определение значений параметров уравнения (a, b). Базисный период принимается по данным табл. 1, $t_{баз}$ = 15.

Студент на основе исходных данных по вариантам составляет табл. 2, в которой дан пример расчета для $t_{баз}$ = 13.

Параметры модели определяют из соотношений:

$$\bar{y} = \frac{\sum_{i=1}^{N} y_i}{N}; \quad \bar{t} = \frac{\sum_{i=1}^{N} t_i}{N};$$

$$a = \bar{y} - b \cdot \bar{t};$$

$$b = \frac{\sum_{i=1}^{N} y_i t_i - \bar{y} \cdot \bar{t} \cdot N}{\sum_{i=1}^{N} t_i^2 - \overline{t^2} \cdot N},$$

где N — число мест базисного периода.

По результатам расчета линейная модель будет иметь вид:

$$y = 0{,}367 + 1{,}745 \cdot t.$$

Для $N + 1$ года $y_{N+1} = 24{,}797$.

Таблица 2

Характеристики для расчета параметров линейной модели прогноза численности трудовых ресурсов

t_i	y_i	t_i^2	$y_i \cdot t_i$
1	**2**	**3**	**4**
1	2	1	2
2	4	4	В
3	5	3	15
4	7	16	28
5	8	25	40
6	8	36	48
7	11	49	77
8	13	64	104
9	16	81	144
10	17	100	170
11	19	121	209
12	21	144	252
13	23	169	299
$\sum_{i=1}^{N} t_i$	$\sum_{i=1}^{N} t_i^2$	$\sum_{i=1}^{N} t_i^2$	$\sum_{i=1}^{N} y_i t_i$
91	154	819	1396
$t = 7$	$\bar{y} = 11{,}85$	$t^{-2} = 49$	

ЛИТЕРАТУРА

1. Замков О.О. Математические методы в экономике: Учеб. — М.: Депо и Сервис, 2004.

2. Сеславина Е.А. Математическое моделирование экономических процессов на транспорте. — М.: РГОТУПС, 2006.

3. Экономико-математическое моделирование: Учеб. для вузов / Под ред. А.Д. Дрогобыцкого. — М.: Экзамен, 2004.

4. Халзанова Л.Э. Математические методы в экономике: Уч. пос. — М.: Волтерс Клувер, 2005.

ЭКОНОМИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЕ
МОДЕЛИРОВАНИЕ НА ТРАНСПОРТЕ

Задание на контрольные работы № 1 и 2
с методическими указаниями

Редактор *Д.Н. Тихонычев*
Компьютерная верстка *О.А. Денисова*

Тип. зак.	Изд. зак. 278	Тираж 1 000 экз.
Подписано в печать 27.09.07	Гарнитура Times	Офсет
Усл. печ. л. 2,5		Формат $60\times90_{1/16}$

Издательский центр РГОТУПСа,
125993, Москва, Часовая ул., 22/2

Участок оперативной печати РГОТУПСа,
125993, Москва, Часовая ул., 22/2