

21/2/4

Одобрено кафедрой
«Сопротивление материалов
и строительная механика»

СТРОИТЕЛЬНАЯ МЕХАНИКА
КИНЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ СХЕМ СООРУЖЕНИЙ

Методические указания
к выполнению контрольных работ № 1–4
для студентов III и IV курсов
специальностей

290300 ПРОМЫШЛЕННОЕ И ГРАЖДАНСКОЕ СТРОИТЕЛЬСТВО (ПГС)
290900 СТРОИТЕЛЬСТВО ЖЕЛЕЗНЫХ ДОРОГ, ПУТЬ И ПУТЕВОЕ
ХОЗЯЙСТВО (С)
291100 МОСТЫ И ТРАНСПОРТНЫЕ ТОННЕЛИ (МТ)

СТРОИТЕЛЬНАЯ МЕХАНИКА ВАГОНОВ

Методические указания
к выполнению контрольных работ № 1–2
для студентов IV курса
специальности
150800 ВАГОНЫ (В)

**СТРОИТЕЛЬНАЯ МЕХАНИКА И МЕТАЛЛИЧЕСКИЕ
КОНСТРУКЦИИ**

Методические указания
к выполнению курсовой работы
для студентов III курса
специальности
170900 ПОДЪЕМНО-ТРАНСПОРТНЫЕ, СТРОИТЕЛЬНЫЕ,
ДОРОЖНЫЕ МАШИНЫ И ОБОРУДОВАНИЕ (СМ)



Москва – 2005

Составитель — канд. техн. наук, проф. В.Н. Сергиенко

Рецензенты — д-р техн. наук, проф. В.А. Фисун

СТРОИТЕЛЬНАЯ МЕХАНИКА
КИНЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ СХЕМ СООРУЖЕНИЙ
СТРОИТЕЛЬНАЯ МЕХАНИКА ВАГОНОВ
СТРОИТЕЛЬНАЯ МЕХАНИКА И МЕТАЛЛИЧЕСКИЕ
КОНСТРУКЦИИ

Методические указания

Редактор *Г.В. Тимченко*
Компьютерная верстка *О.А. Денисова*

| | | |
|-----------------------------|------------------|---|
| Тип. зак. | Изд. зак. 192 | Тираж 5 000 экз. |
| Подписано в печать 10.02.05 | Гарнитура Times. | Офсет |
| Усл. печ. л. 2,25 | | Формат 60×90 ¹ / ₁₆ |

Издательский центр РГОТУПС,
125993, Москва, Часовая ул., 22/2

Участок оперативной печати РГОТУПС,
125993, Москва, Часовая ул., 22/2

© Российский государственный открытый технический университет
путей сообщения, 2005

ОБЩИЕ ПОЛОЖЕНИЯ

Кинематический анализ схем сооружений, теория которого приведена в данном методическом указании, проводится при решении любой задачи строительной механики.

Поэтому эти методические указания относятся к выполнению всех контрольных и курсовых работ в курсе «Строительная механика» для всей специальности.

Расчет сооружения начинается с составления расчетной схемы, поэтому оценка правильности образования стержневых систем имеет огромное значение.

КИНЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ СООРУЖЕНИЙ

1. РЕАЛЬНОЕ СООРУЖЕНИЕ И ЕГО РАСЧЕТНАЯ СХЕМА

В строительной механике рассматривается расчет сооружений, представляющих собой совокупность элементов (стержней, пластин, оболочек и массивных тел), объединенных в систему при помощи специальных связей таким образом, что данная система должна быть внутренне геометрически неизменяемой, а внешне неподвижна по отношению к земле. Под геометрической неизменяемостью сооружения понимается такое его состояние, при котором перемещения отдельных точек и узлов сооружения осуществляются в результате деформаций элементов и всего сооружения.

С геометрической точки зрения различают следующие типы сооружений:

1) сооружения, составленные из стержней, то есть из таких элементов, у которых один размер (длина) значительно превышает два других (ширину и высоту); такие сооружения называются стержневыми (рис. 1, *а*);

2) сооружения, составленные из пластин, плит и оболочек, то есть из элементов, у которых размеры по двум направлениям (длина и ширина) гораздо больше толщины; такие сооружения называются складчатыми тонкостенными системами (рис. 1, *б*);

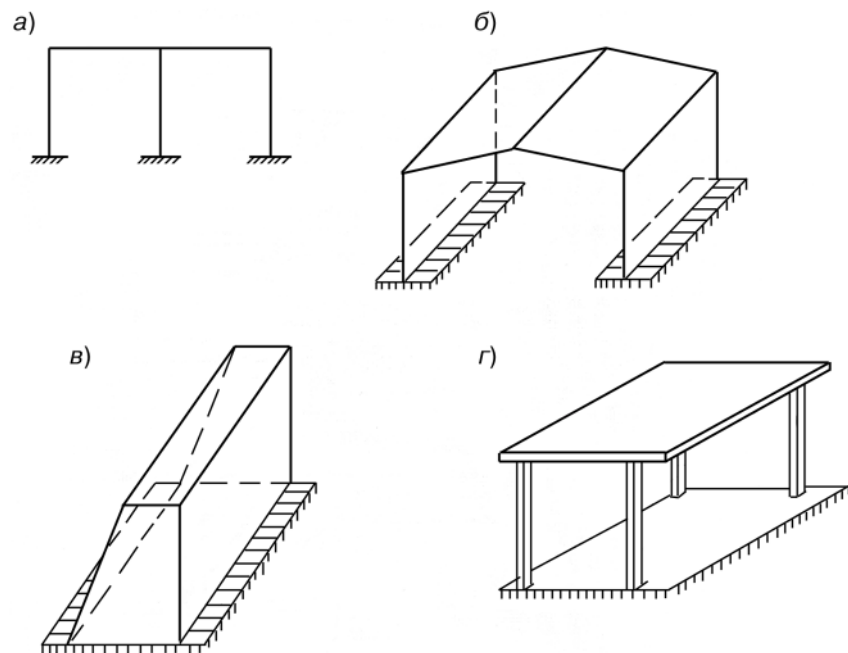


Рис. 1

3) сооружения, у которых все три размера одного и того же порядка; их можно назвать массивами, сплошными средами или просто телами (рис. 1, в);

4) смешанные сооружения, состоящие из стержней (стоек, ригелей) и пластин (перекрытия, стены) (рис. 1, г).

Такая классификация сооружений весьма важна, так как указанные первые три типа сильно различаются между собой по характеру расчета. В курсе «Строительная механика», читаемом в нашем университете, рассматриваются только стержневые сооружения [1].

Расчет сооружений с точным учетом всех геометрических размеров и формы его элементов, а также с учетом строгого их взаимодействия между собой теоретически недоступен, и поэтому строительная механика использует метод научной абстракции, заменяя сооружения их расчетными схемами.

Расчетная схема сооружения — это упрощенное изображение его элементов и связей между элементами, отражающее наиболее важные свойства, которые определяют поведение действительного сооружения под нагрузкой. В расчетной схеме сооружения стержни заменяются их продольными осями, пластины заменяются срединными плоскостями, а поперечные сечения стержней и нормальные к срединной плоскости сечения пластин (плит) независимо от их формы характеризуются, в общем виде, численными значениями площадей и моментов инерции. Реальные опорные устройства и связи между элементами сооружения заменяются идеальными связями [2].

По расположению отдельных элементов сооружения их расчетные схемы разделяются на плоские и пространственные схемы. *Плоские сооружения* — это, как правило, стержневые сооружения, продольные оси элементов которых располагаются в одной плоскости, проходящей через одну из главных осей инерции их поперечных сечений. Плоские сооружения обладают тем свойством, что если нагрузки лежат в их плоскости, то и перемещения частей, узлов и точек элементов сооружений (потеря устойчивости не учитывается) происходят в той же плоскости.

2. ВИДЫ ДИСКОВ, СВЯЗЕЙ И ОПОРЫ В СХЕМЕ СООРУЖЕНИЯ

Как отмечено ранее, *сооружение* — это совокупность элементов (дисков), объединенных в систему при помощи специальных связей. Что представляют собой эти связи для плоских систем?

Введем понятие «диск». За *диск* будем принимать элемент схемы сооружения, для которого доказана геометрическая неизменяемость. Диск — понятие, в достаточной мере, произвольное, за диск может быть принято одно сплошное тело или совокупность сплошных тел, объединенных связями в геометрически неизменяемую систему, и даже один отдельный узел (отдельная точка, правда, с некоторой поправкой) схемы со-

оружения. Одну и ту же схему сооружения можно считать состоящей из нескольких крупных дисков или из большого числа более мелких дисков [3].

Каждый изолированный элемент (узел, стержень, пластина и т.п.) по отношению к другим элементам сооружения обладает определенным числом степеней свободы, то есть числом возможных независимых перемещений по определенным направлениям. Один диск конечных размеров, взятый изолированно, на плоскости имеет три степени свободы, то есть имеет два поступательных перемещения по направлению произвольно выбранных координатных осей и одно вращательное движение вокруг некоторой произвольно выбранной точки (центра). Всякое иное движение диска может быть представлено как сумма трех перечисленных движений. Учитывая, что сооружение представляется, как совокупность некоторого числа дисков D , то возможная степень подвижности такого сооружения, если мысленно представить, что все его связи, ограничивающие возможные перемещения дисков, нарушены, равна $3D$.

Как было уже отмечено, что диск может иметь настолько малые размеры, что становится точкой (узлом). В отличие от диска конечных размеров одна такая отдельная точка имеет на плоскости только две степени свободы, то есть, способна поступательно перемещаться по направлению выбранных координатных осей. Вращательное движение точки (не следует смешивать с движением точки относительно некоторого центра по окружности) не меняет ее положение на плоскости, поэтому учету не подлежит. Следовательно, несколько отдельных изолированных точек числом U обладают степенью подвижности, равной $2U$.

Так как реальные сооружения располагаются на земле и должны быть неподвижны по отношению к ней, то землю будем рассматривать как неподвижный диск бесконечных размеров.

В действительном сооружении элементы его схемы объединены друг с другом и с землей самыми разнообразными способами, называемыми *связями*.

Например, два диска (части) сооружения соединены так, что исключена какая то ни была возможность перемещения одного диска относительно другого. Это так называемое *жесткое соединение* или заделка (запайка) (рис. 2, а).

Может быть и такое соединение, когда один диск имеет возможность только вращаться относительно другого диска около точки их контакта, а поступательные движения по направлению выбранных координатных осей одного диска по отношению к другому запрещены. Такое соединение называется *шарнирным*, или просто шарнир. На чертежах схем шарнир обозначается кружком. Если шарнир соединяет два диска, то он называется *простым шарниром* (рис. 2, б), если более двух дисков — *сложным*. Сложный шарнир объединяет в себе несколько простых шарниров, число которых определяется по формуле:

$$Ш = D - 1, \quad (1)$$

где $Ш$ — число простых шарниров;

D — число дисков, объединенных в сложном шарнире.

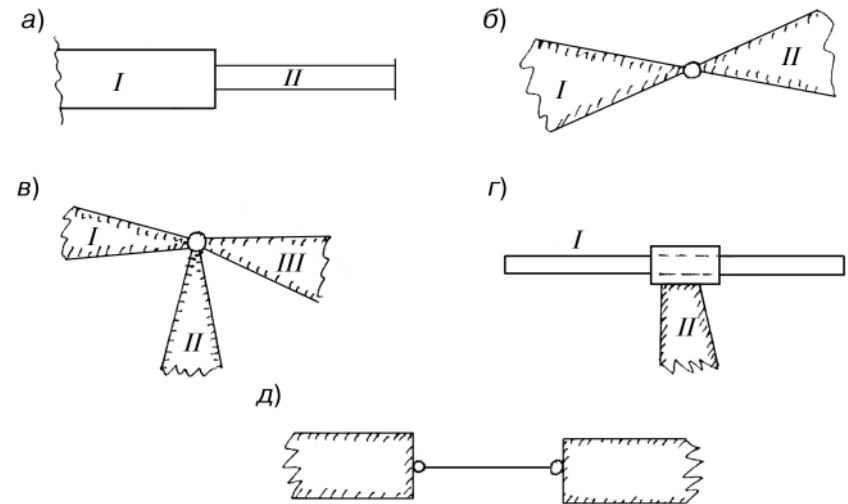


Рис. 2

Сложные шарниры могут быть двойными, тройными и т.д. На рис. 2, в приведен двойной шарнир.

Два диска в сооружении могут быть соединены таким образом, что возможно только поступательное движение одного диска относительно другого по направлению его продольной оси. Такое соединение (такая связь) называется *ползуном*. На рис. 2, г приведен такой ползун, в котором диск 2 может перемещаться вдоль оси диска 1, а поступательное движение по перпендикулярному направлению и вращательное движение относительно продольной оси диска 1 запрещены.

Наконец, две части (два диска) сооружения соединены таким образом, что оказывается возможным и вращательное и поступательное по направлению одной из координатных осей движения одной части относительно другой. Такое соединение осуществляется стержнем (брусом), концы которого шарнирно присоединены к этим частям, и называется просто стержнем (рис. 2, д). При таком соединении запрещено поступательное перемещение одного диска относительно другого по направлению оси стержня.

Ранее отмечено, что реальное сооружение неподвижно по отношению к земле. Эта неподвижность сооружения обеспечивается опорными связями, называемыми опорами.

Рассмотрим различные типы опор плоских систем [1; 4]. В опорах возникают силы взаимодействия между сооружением и землей, называемые опорными реакциями, которые вместе с внешней нагрузкой представляют уравновешенную систему внешних сил, действующих на сооружение.

Первый тип опоры представлен на рис. 3, а. Он состоит из двух балансиров — верхнего 1 и нижнего 3, между которыми проложен валик 2, играющий роль цилиндрического шарнира. Благодаря этому валику верхний балансир может поворачиваться относительно нижнего балансира. Нижний балансир опирается на катки 4, что позволяет опоре перемещаться по опорной плоскости, называемой опорной подушкой 5.

Рассматриваемая опора имеет две степени свободы, так как трением в шарнире и катках принято при расчете пренебрегать. Эта опора носит название *шарнирно-подвижной* опо-

ры. Конструктивное осуществление такой опоры может быть весьма разнообразным (рис. 3, а, б), но расчетная схема ее изображается в виде стержня с двумя идеальными шарнирами на концах его (рис. 3, в). Реакция такой опоры представляет собой силу, направление действия которой перпендикулярно направлению линейного перемещения по каткам, то есть по направлению стержня.

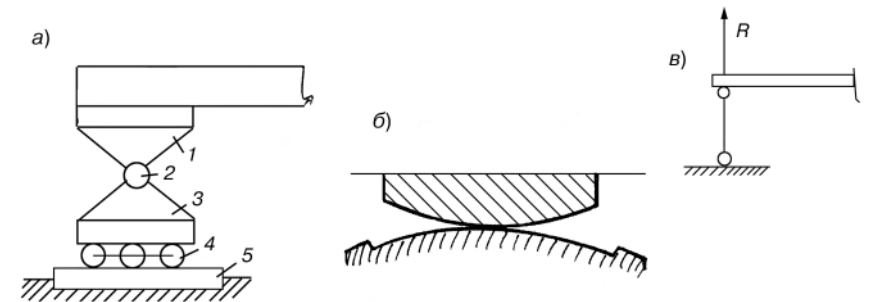


Рис. 3

Второй тип опоры аналогичен первому, но отличается от него тем, что нижний балансир жестко прикрепляется к опорной подушке при помощи анкерных болтов или каким-либо другим способом (рис. 4, а). Эта опора допускает только поворот системы относительно цилиндрического шарнира между балансирами опоры. Такая опора обладает одной степенью свободы и носит название *шарнирно-неподвижной*. Схематическое изображение такой опоры представлено (рис. 4, б, в) в

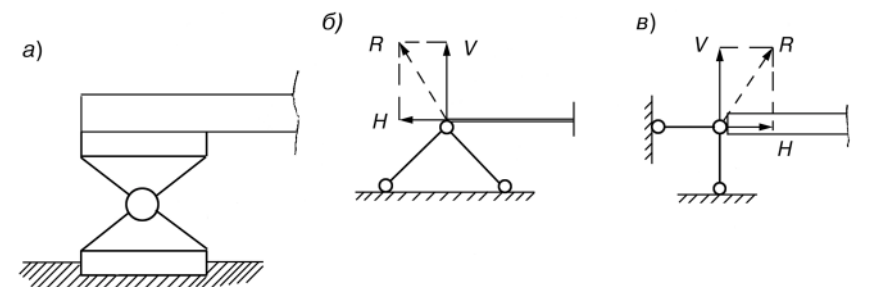


Рис. 4

виде двух стержней, объединенных между собой верхним шарниром. Опорная реакция ее проходит через верхний шарнир и может быть представлена в виде двух составляющих, неизвестных по величине, но определенных по направлению (возможны горизонтальное и вертикальное направления).

Третий тип опоры представляет собой заделку (рис. 5, а), так называемую *защемляющую неподвижную опору*, степень свободы которой равна нулю. Эта опора не допускает ни линейных, ни вращательных движений. Реакция такой опоры определяется тремя параметрами: величиной и направлением сил и моментом пары в заделке, то есть говорят, что такая опора имеет три реакции (рис. 5, в). Схематически опора третьего типа может быть представлена тремя опорными стержнями (например, рис. 5, б), которые не пересекаются в одной точке.

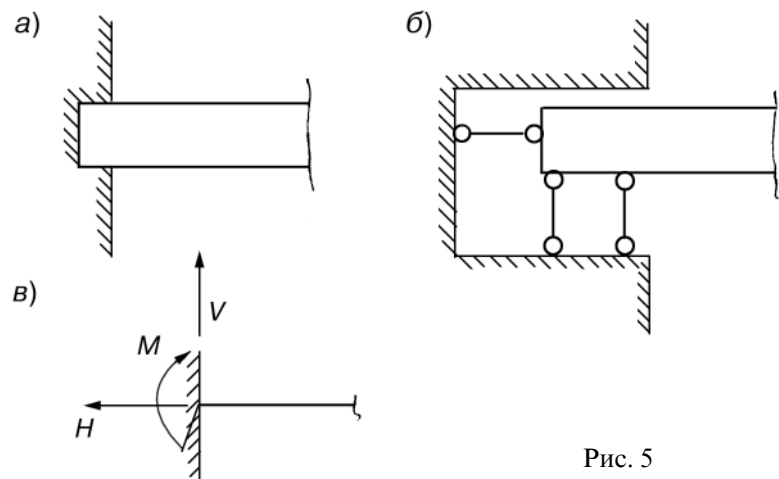


Рис. 5

3. АНАЛИЗ ОБРАЗОВАНИЯ СТЕРЖНЕВЫХ СООРУЖЕНИЙ

Как было отмечено ранее, схемы реальных сооружений должны быть неизменяемыми системами, то есть способными воспринимать внешнюю нагрузку без заметного изменения взаимного расположения частей сооружения. При проектировании конкретного сооружения инженер предварительно должен определить его расчетную схему, проанализировать геомет-

рическую структуру образования схемы сооружения и затем уже выполнить детальный расчет сооружения.

Для осуществления анализа стержневой системы на предмет признания ее схемой сооружения существуют два признака анализа: аналитический и геометрический [5].

3.1. Аналитический признак геометрической неизменяемости

Расчетные схемы многих сооружений имеют вид кинематических цепей, составленных из отдельных плоских геометрически неизменяемых звеньев (дисков) и узлов (точек). Диски связаны друг с другом шарнирами, с узлами (точками) стержнями, а с неподвижным звеном (с землей) — опорными стержнями (рис. 6). Степень свободы такой системы элементов определяется по известной формуле Чебышева из [6]:

$$W = 3D + 2U - 2Ш - C - C_{\text{оп}}, \quad (2)$$

где D — число дисков;
 U — число узлов (точек);
 $Ш$ — число простых шарниров;
 C — число внутренних связей;
 $C_{\text{оп}}$ — число внешних опорных связей в расчетной схеме сооружения.

Формулой (2) описывается так называемый аналитический признак сооружения. Сумма $(3D + 2U)$ определяет число степеней свободы всех дисков и узлов, составляющих рассматриваемую кинематическую цепь (расчетную схему сооружения) и мысленно представленных свободными от всех связей-ограничений между собой. Вторая сумма слагаемых формулы (2) $(2Ш + C + C_{\text{оп}})$ — число связей-ограничений, объединяющих совокупность элементов (дисков и узлов) в кинематическую цепь.

Аналитический признак считается выполненным, если $W \leq 0$. Если $W = 0$, то кинематическая цепь имеет минимально необходимое количество связей-ограничений, чтобы быть геометрически неизменяемой и неподвижной по отношению к земле, то есть быть сооружением. В этом случае мы будем иметь

дело со статически определимой системой, расчет которой возможен с помощью только уравнений равновесия (уравнений статики). Если $W < 0$, то рассматриваемая кинематическая цепь имеет «лишние» связи, то есть цепь (стержневая система) имеет больше связей-ограничений, чем это необходимо. В этом случае стержневая система будет статически неопределимой, для расчета которой помимо уравнений статики потребуются дополнительные уравнения совместности деформаций. Если же $W > 0$, то рассматриваемая стержневая система не имеет достаточного количества связей и будет геометрически изменяемой, то есть будет не сооружением, а механизмом.

Проверим, выполняется ли требование аналитического признака для системы, приведенной на рис. 6? Рассматриваемая система содержит три диска (I, II и III, то есть $D = 3$), три узла (точки A, B и C, то есть $U = 3$), два шарнира (1 и 2, то есть $Ш = 2$), восемь внутренних связей-стержней и три опорных стержня (то есть $C = 8, C_{оп} = 3$). Итак, степень свободы системы, вычисленная по формуле (2), равна:

$$W = 3 \cdot 3 + 2 \cdot 3 - 2 \cdot 2 - 8 - 3 = 0.$$

То есть, система имеет минимально необходимое количество связей-ограничений и может быть сооружением.

Выполнение требования, заданного аналитическим признаком, является необходимым условием геометрической неизменяемости сооружения, но недостаточным. Это объясняется тем обстоятельством, что можно получить такую систему, которая будет иметь необходимое количество связей-ограничений, но некоторые части ее будут все-таки подвижны вследствие того, что связи системы могут быть приложены не там, где необходимо. То есть, аналитический признак сооружения

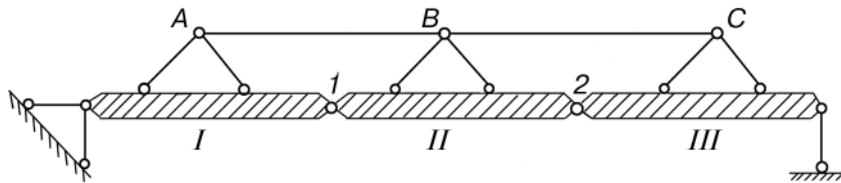


Рис. 6

является необходимым, но недостаточным признаком. Он дает нам возможность выяснить: может ли рассматриваемая стержневая система быть сооружением или не может? Окончательный ответ на поставленный вопрос может быть получен только после анализа геометрической структуры стержневой системы. Поэтому мы переходим к рассмотрению геометрического признака сооружения.

3.2. Геометрический признак неизменяемости сооружения

Рассмотрим присоединение точки (узла) A к диску (земле) при помощи стержня AB с шарнирами на концах (рис. 7, а). На плоскости при таком соединении возможно вращательное движение узла A по окружности радиуса AB по отношению к диску. Так как узел A на плоскости имеет две степени свободы (возможны два линейных перемещения по двум взаимно перпендикулярным направлениям), то рассматриваемое присоединение узла к диску запрещает перемещение узла A по отношению к диску по направлению стержня AB (по оси Y), но позволяет мгновенное линейное перемещение узла по направлению, перпендикулярному стержню AB (по оси X). Чтобы запретить возможное перемещение узла A по оси X необ-

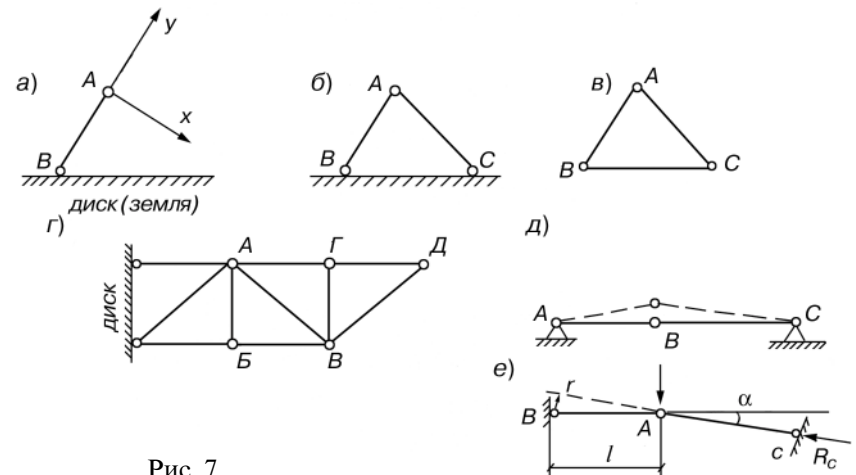


Рис. 7

ходимо присоединить его к диску и вторым стержнем AC , таким образом, чтобы он не лежал на одной прямой со стержнем AB , как показано на рис. 7, б. Практически мы получили так называемую простейшую геометрически неизменяемую треугольную систему, состоящую из трех узлов и трех стержней (рис. 7, в). Используя эту простейшую треугольную систему можно построить плоское сооружение (ферму, рис. 7, г) следующим образом. Узел A присоединяется к диску (земле) двумя стержнями, не лежащими на одной прямой. Затем узел B присоединим двумя стержнями к неподвижному узлу A и к диску (земле). Аналогично присоединим узел B к неподвижным узлам A и B и т.д. Полученная таким образом плоская треугольная ферма является сооружением, так геометрическая неизменяемость уже доказана из построения ее, и, кроме того, выполняется аналитический признак сооружения. Ферма имеет пять узлов ($A, B, B, Г$ и $Д$), то есть $У = 5$, семь внутренних связей-стержней ($С = 7$) и три опорных стержня ($С_{оп} = 3$). Формула (2) для ферм будет иметь вид:

$$W = 2У - С - С_{оп}. \quad (3)$$

Следовательно, степень подвижности рассматриваемой фермы: $W = 2 \cdot 5 - 7 - 3 = 0$, то есть ферма имеет минимально необходимое число связей.

Обратим внимание на рис. 7, д, на котором узел (шарнир) B присоединен двумя стержнями (AB и BC), лежащими на одной прямой (строго по горизонтали). С точностью до малых величин второго порядка в этой системе возможно перемещение узла B по вертикали. После того как произойдет это перемещение, система становится неизменяемой (см. пункт на рис. 7, д). Системы, точки которых способны перемещаться без изменения геометрических размеров с точностью до величин малых высшего порядка, называются мгновенно изменяемыми. Система, приведенная на рис. 7, д не может находиться в равновесии при действии на нее вертикальной нагрузки, так как нарушается принцип возможных перемещений, ибо сумма работ на возможном перемещении по вертикали не равна нулю. При компоновке сооружения необходимо избегать

мгновенно изменяемых систем, чтобы предотвратить разрушение сооружения вследствие возникновения в элементах (стержнях) сооружения очень больших усилий. Поясним выше сказанное на примере.

Система на рис. 7, е при малом угле α является системой, близкой к мгновенно изменяемой. Вычислим в ней реакцию R_c из уравнения статики $\Sigma M_B = 0$ (сумма моментов всех сил относительно точки B):

$$Pl - R_c r = Pl - R_c l \sin \alpha = 0; \quad r = l \sin \alpha; \quad R_c = P / \sin \alpha; \quad \Sigma Y = 0$$

При малом угле α в стержне AC будет возникать большое, практически разрушающее усилие, реакция R_c . Поэтому системы, близкие к мгновенно изменяемым, и, тем более, мгновенно изменяемые не могут быть использованы для компоновки схем сооружения. Для компоновки схем сооружения должны использоваться только геометрически неизменяемые системы, так как эти системы способны воспринимать внешние нагрузки вплоть до исчерпания несущей способности ее элементов. Как указывалось выше, часть стержневой системы, неизменяемость которой доказана, называется *диск*. В принципе и отдельный стержень можно считать диском. Ферма, приведенная на рис. 7, г считается диском, а эта ферма вместе с диском-землей будет считаться сложным диском.

Рассмотрим образование системы, изображенной на рис. 8. Узлы A и B присоединены к диску-земле двумя стержнями, не лежащими на одной прямой, каждый, а к ним присоединен

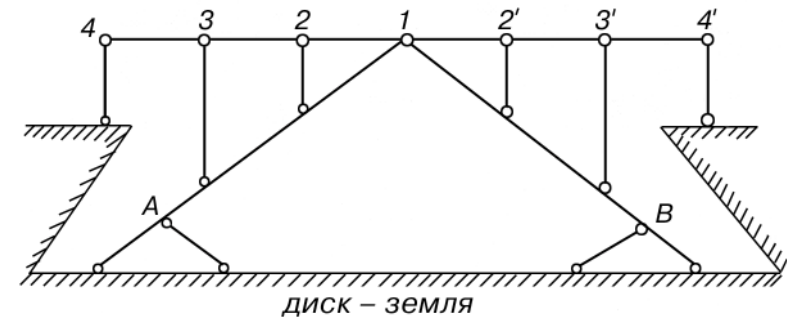


Рис. 8

узел 1 с помощью двух стержней (система $A1B$). Тогда диск-земля и система $A1B$ представят собой единый (сложный) диск. К этому сложному диску присоединен узел 2 двумя стержнями, не лежащими на одной прямой. Аналогично присоединены и остальные узлы системы. Следовательно, система на рис. 8 является геометрически неизменяемой, причем в ее состав входит только необходимое количество стержней-связей, что подтверждается определением числа степеней свободы по формуле (3). Система имеет 9 узлов ($V = 9$), 12 внутренних стержней-связей ($C = 12$) и 6 внешних связей ($C_{\text{он}} = 6$), следовательно:

$$W = 2 \cdot 9 - 12 - 6 = 0.$$

Для присоединения узлов могут использоваться не только прямолинейные стержни, но и стержни произвольной конфигурации, имеющие по концам шарниры. На рис. 9 приведена трехшарнирная арка с надарочным строением, в которой основные несущие конструкции криволинейные. Геометрическая структура этой арки аналогична структуре системы, приведенной на рис. 8, и степень свободы ее равна нулю ($W = 2 - 9 - 11 - 7 = 0$), то есть система имеет необходимое количество связей.

Теперь рассмотрим присоединение дисков к земле. Как было уже отмечено, диск на плоскости имеет три степени свободы. В качестве степеней свободы принимаются посту-

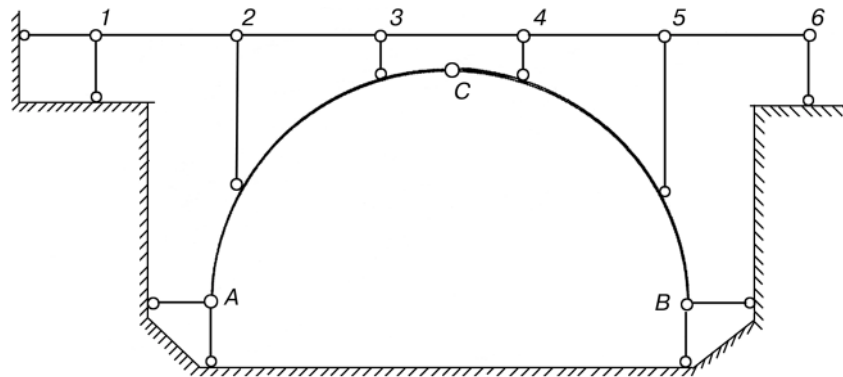


Рис. 9

пательные перемещения по направлению выбранных координатных осей любой произвольной точки (например, точки A), принадлежащей диску, и вращательное движение всего диска относительно произвольно выбранного центра (например, точки O) (рис. 10, а). Для жесткого прикрепления диска к земле, не позволяющего диску менять своего положения относительно земли в определенной плоскости, необходимо наложить на диск ограничения, запрещающие указанные перемещения диска относительно земли. Для этого достаточно присоединить диск к земле при помощи трех стержней, не пересекающихся в одной точке (рис. 10, б, в). Для соединений, указанных на рис. 10, г, д, возможен мгновенный поворот относительно точки пересечения стержней (точка A), что недопустимо для сооружения. Если стержни, прикрепляющие диск к земле, параллельны (рис. 10, е), то диск может перемещаться относительно земли поступательно (центр мгновенного поворота находится в этом случае в бесконечности).

При анализе стержневых систем их удобно разбивать на диски, неизменяемость которых очевидна. В этом случае для анализа неизменяемости всей системы достаточно проанализировать соединение дисков между собой.

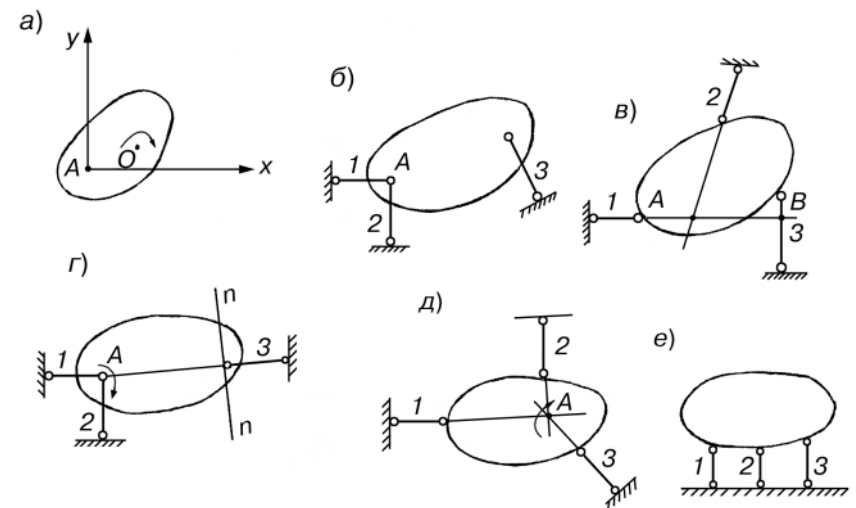


Рис. 10

Соединение двух дисков. Этот случай был рассмотрен ранее, когда рассматривались случаи присоединения диска к земле. При этом земля представляется как бесконечно большой диск (рис. 10, б, в). То есть, два диска могут соединяться в неизменяемую систему с помощью трех стержней, оси которых не пересекаются в одной точке (рис. 11, а). Возможно соединение двух дисков с помощью шарнира и стержня, ось которого не должна проходить через шарнир (рис. 11, б). На рис. 11, в, г показаны мгновенно изменяемые системы, так как на рис. 11, в ось стержня BC проходит через шарнир A , а на рис. 11, г стержни BC , DE и FG , соединяющие диски I и II , пересекаются в точке A .

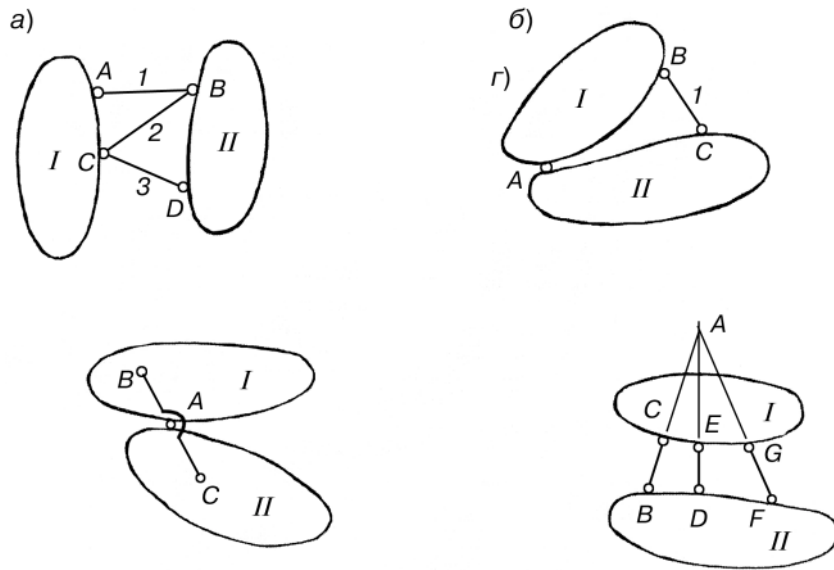


Рис. 11

Примеры соединения реальных стержневых систем, рассматриваемых как диски (заштрихованная часть стержневой системы представляет собой диск), в неизменяемую систему даны на рис. 12, а, б. На рис. 12, а приведена рама, содержащая два диска I и II (г-образные стержни), соединенных при помощи шарнира I и стержня 2 . Учитывая, что ось стержня 2

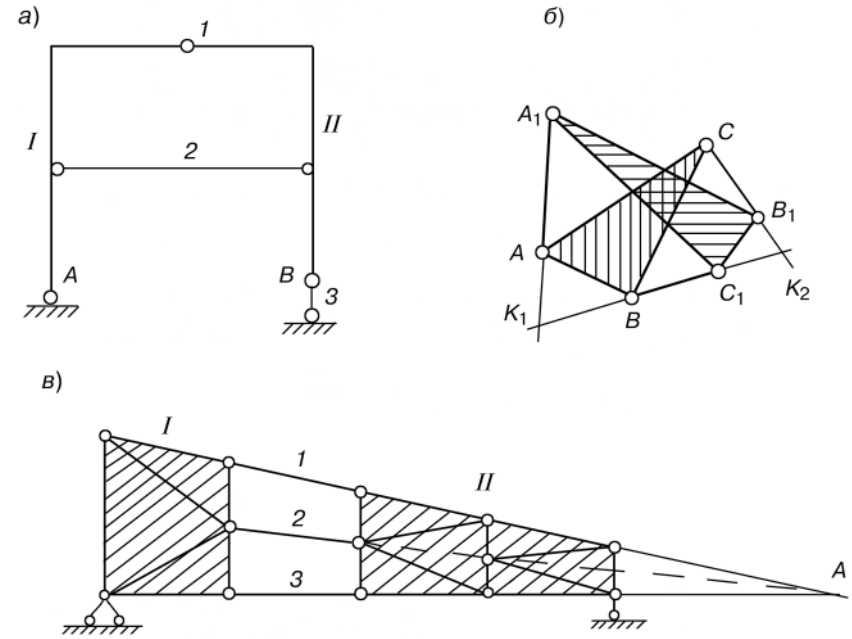


Рис. 12

не проходит через шарнир I , то диски I и II можно рассматривать как единый (сложный) диск. Этот сложный диск присоединен к диску земля шарниром A и стержнем 3 , не проходящим через шарнир A . Система, изображенная на рис. 12, б, также является неизменяемой, так как два диска ABC и $A_1B_1C_1$, представляющие собой простейшую геометрически неизменяемую стержневую форму, соединены между собой с помощью трех стержней AA_1 , BC_1 и B_1C , не пересекающихся в одной точке. На рис. 12, в приведена мгновенно изменяемая система (ферма), так как два ее неизменяемых диска (I и II) соединены между собой тремя стержнями (1 , 2 и 3), пересекающиеся в одной точке A . В ферме возможен мгновенный поворот одного диска (например, первого) относительно другого (второго).

Последовательное соединение дисков. Итак, два диска при объединении их в сложный единый диск должны быть соеди-

нены между собой (это отмечено ранее) при помощи трех стержней или при помощи шарнира и стержня определенным образом. К такому сложному диску таким же образом можно будет присоединить еще один диск и получить еще более сложный диск. Такое последовательное присоединение дисков позволяет получить целое сооружение. На рис. 13 дан пример последовательного соединения дисков. Диск I соединен с диском II шарниром A и стержнем BC, ось которого не проходит через шарнир. Диск I и диск II образуют новый сложный диск, к которому присоединен диск III с помощью трех стержней,

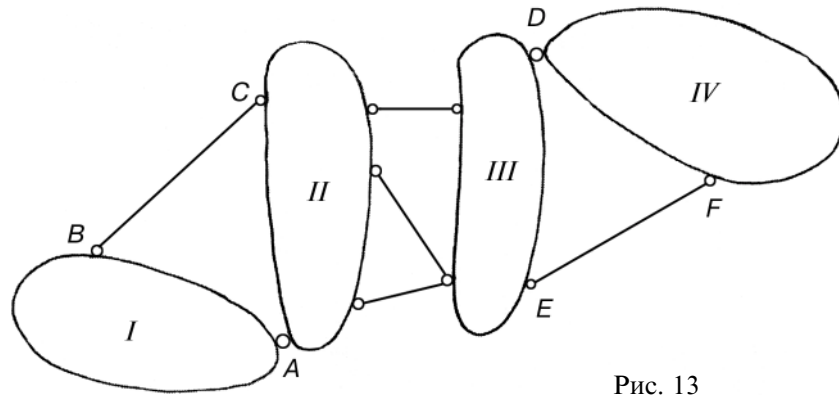


Рис. 13

не пересекающихся в одной точке. Следовательно, полученный новый более сложный диск, содержащий три простых диска. К этому новому диску присоединен диск IV шарниром D и стержнем EF. Рассмотренная последовательность дисков образует геометрически неизменяемую систему. Практическим примером такой неизменяемой системы дисков может служить многопролетная шарнирная балка (рис. 14).

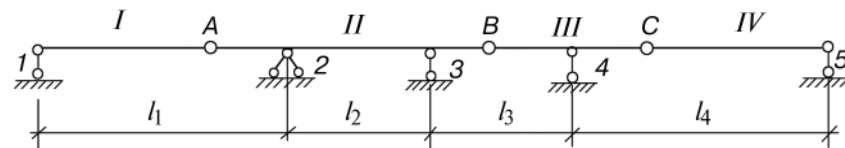


Рис. 14

Соединение трех дисков. Обратимся к рис. 7, в, на котором изображена простейшая геометрически неизменяемая треугольная форма (три узла A, B и C соединены между собой попарно стержнями). Стержни этой неизменяемой формы можно рассматривать как диски, тогда узлы формы будут являться шарнирами. Таким образом, имеем соединение трех дисков с помощью трех шарниров, нележащих на одной прямой, представляющее собой неизменяемую систему (рис. 15, а). На рис. 15, б также представлена система, состоящая из трех дисков, соединенных между собой при помощи трех шарниров A, B и C, которые лежат на одной прямой. Такая система является мгновенно изменяемой, потому что возможен мгновенный поворот дисков относительно друг друга (возможно малое перемещение шарнира B по вертикали n-n).

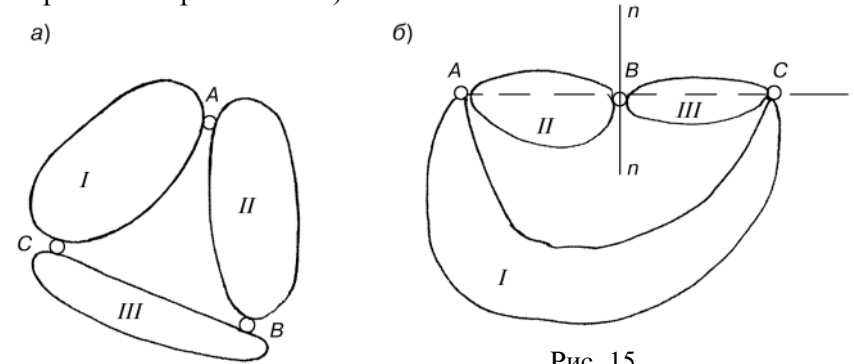


Рис. 15

Так как шарнир эквивалентен двум стержням, то соединение дисков с помощью шарнира можно заменить соединением с помощью двух стержней, нележащих на одной прямой. То есть, система, приведенная на рис. 15, а, будет эквивалентна системе, изображенной на рис. 16, а. В этой системе три диска между собой присоединены при помощи шести стержней таким образом, что точки пересечения двух стержней, эквивалентных конкретному шарниру, не лежат на одной прямой.

Возможно и смешанное соединение дисков с использованием, как шарниров, так и стержней с условием, что шарниры и точки пересечения стержней не лежат на одной прямой (рис. 16, б, в).

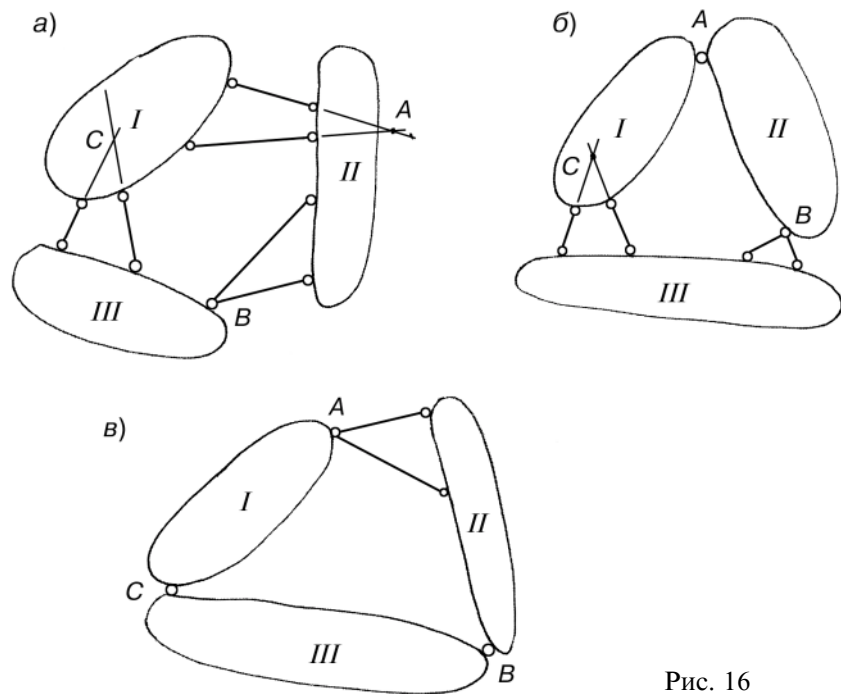


Рис. 16

4. ПРАКТИЧЕСКИЕ ПРИМЕРЫ ПО КИНЕМАТИЧЕСКОМУ АНАЛИЗУ СХЕМ СООРУЖЕНИЙ

В настоящем параграфе рассмотрены системы на предмет того, являются ли они схемами сооружений. То есть, имеют ли они необходимое количество связей-ограничений (аналитический признак сооружения) и являются ли они геометрически неизменяемыми и неподвижными по отношению к земле?

Рассмотрим систему, приведенную на рис. 17, а. Данная система состоит из четырех дисков ($D = 4$) и узла F ($Y = 1$), объединенных в систему при помощи шарниров B и C ($Ш = 3$, так как B двойной шарнир), четырех стержней (BD, DE, BF и EF , то есть $C = 4$). К земле система присоединена тремя стержнями, не пересекающимися в одной точке ($C_{он} = 3$). По форму-

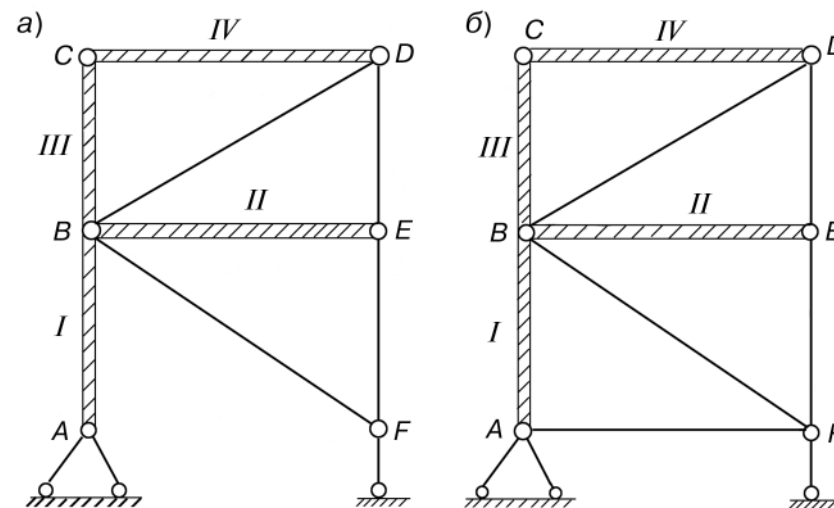


Рис. 17

ле Чебышева (2) установим фактическое соотношение между возможностями степеней свободы всех элементов системы, свободных от связей, и числом связей-ограничений, примененных в рассматриваемой системе.

$$W = 3D + 2Y - 2Ш - C - C_{он} = 3 \cdot 4 + 2 \cdot 1 - 2 \cdot 3 - 4 - 3 = 1 > 0.$$

Данная система не обладает необходимым числом связей (не хватает одной связи, то есть аналитический признак геометрической неизменяемости схемы сооружения не выполняется) и, следовательно, система не может быть схемой сооружения. Установим, в каком месте системы недостает этой связи, то есть, выполним анализ геометрической структуры системы.

Рассматриваемая система присоединена к земле при помощи трех стержней, не пересекающихся в одной точке (опоры A и F). Следовательно, система неподвижна по отношению к земле и в ней не хватает одной внутренней связи-стержня. Диски III и IY присоединены друг к другу при помощи шарнира C и стержня BD , не проходящего через шарнир C , то есть образуют сложный геометрически неизменяемый диск BCD .

Этот сложный диск аналогичным образом объединен с диском II при помощи шарнира B и стержня DE. Получен геометрически неизменяемый диск BCDE, к которому присоединен неподвижный узел F с помощью двух стержней BF и EF, не лежащих на одной прямой. В конечном итоге мы подошли к рассмотрению соединения трех дисков, диска-земли, диска I и сложного диска BCDEF. Диск I присоединен шарниром B к сложному диску BCDEF, а к земле двумя стержнями, не лежащими на одной прямой, что соответствует необходимым требованиям. В тоже время как сложный диск BCDEF присоединен к земле только одним стержнем (опора F), что недостаточно. Именно в этом месте системы недостает одной связи. Добавив в заданной системе стержень AF (рис. 17, б), получим неизменяемую систему. В новой системе (рис. 17, б) диск I объединен с диском BCDEF с помощью шарнира B и стержня AF. Полученный неизменяемый диск ABCDEF присоединен к диску-земля при помощи трех стержней, непересекающихся в одной точке.

Рассмотрим систему, приведенную на рис. 18. Система содержит четыре диска (AB, BC, CD и DE, то есть $D = 4$) три узла (F, G и H, то есть $V = 3$), объединенных в систему тремя шарнирами (B, C, D, то есть $Ш = 3$), девятью внутренними стержнями (AF, BF, CF, CG, CH, DH, FG, GH и EH, то есть $C = 9$). К земле система прикреплена тремя стержнями, непересекающимися в одной точке (опоры A и E), то есть $C_{\text{он}} = 3$.

Аналитический признак геометрической неизменяемости схемы сооружения для системы выполняется, так как

$$W = 3 \cdot 4 + 2 \cdot 3 - 2 \cdot 3 - 9 - 3 = 0,$$

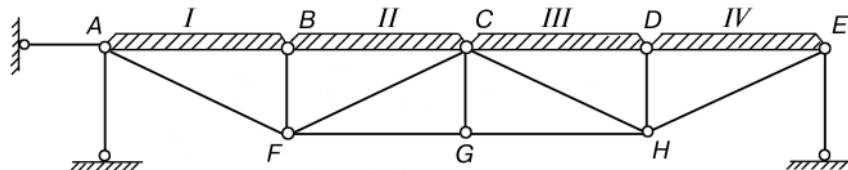


Рис. 18

а, следовательно, система имеет необходимое количество связей. Однако условие $W = 0$ является лишь необходимым, но недостаточным для неизменяемости системы. Поэтому необходим анализ образования геометрической структуры системы. Узел F присоединен к первому диску (AB) при помощи двух стержней, не лежащих на одной прямой, что делает их неподвижными между собой. Имеем сложный диск ABF. Аналогично получен сложный диск DEH (объединение четвертого диска DE с узлом H). Второй диск BC жестко присоединен к сложному диску ABF с помощью шарнира B и стержня CF (стержень CF не проходит через шарнир B).

Получен сложный диск ABCF. Аналогично диск III (CD) соединен с диском DEH с помощью шарнира D и стержня CH. Получен сложный диск CDEH. Узел G с помощью стержней CG и FG, не лежащих на одной прямой, присоединен к диску ABCF. Получен новый сложный диск ABCGF, который с помощью шарнира C и стержня GH жестко присоединен к диску CDEH. Получается, что рассмотренная система внутренне геометрически неизменяема, а так как она присоединена к земле с соблюдением необходимых требований, то она и неподвижна по отношению к земле. Так как оба признака геометрической неизменяемости схем сооружений (аналитический и геометрический) для системы соблюдены, то данная схема может являться схемой сооружения.

Рассмотрим систему, приведенную на рис. 19. Система содержит пять дисков (AB, CL, DK, EH и FG, то есть $D = 5$), объединенных между собой двенадцатью стержнями ($C = 12$),

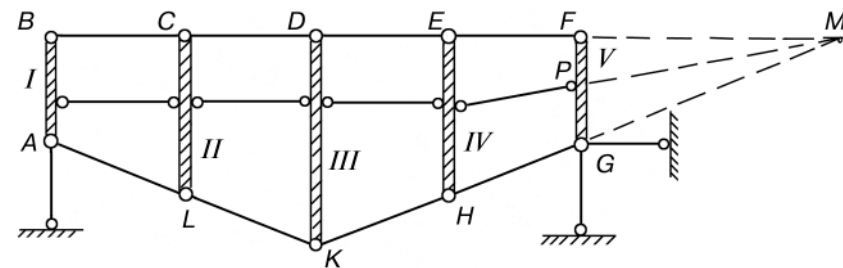


Рис. 19

и прикреплена к земле тремя стержнями ($C_{\text{он}} = 3$). Так эти стержни не пересекаются в одной точке, то система неподвижна относительно земли. Узлов и шарниров система не имеет, то есть $U = 0$ и $Ш = 0$. Проверим выполнение аналитического признака:

$$W = 3 \cdot 5 - 12 - 3 = 0.$$

Система имеет необходимое количество связей и может быть схемой сооружения. Проверим геометрическую структуру образования системы. В системе диски с первого по четвертый попарно соединены друг с другом тремя стержнями, непересекающимися в одной точке, и образуют сложный неизменяемый диск $ABCDEFHKL$. Этот сложный диск присоединен с диском FG стержнями EF , NP и GH , которые пересекаются в точке M . Имеем мгновенно изменяемую систему, то есть геометрический признак не соблюден и система не может быть схемой сооружения.

Рассмотрим систему, приведенную на рис. 20. Система имеет три диска ($D = 3$), соединенных между собой шарнирами B и C ($Ш = 2$), и прикреплена к земле заделками (опоры A и D , то есть $C_{\text{он}} = 6$). Внутренних узлов (точек) и стержней система не имеет, следовательно, $U = 0$ и $C = 0$.

Итак:

$$W = 3D - 2Ш - C_{\text{он}} = 3 \cdot 3 - 2 \cdot 2 - 6 = -1 < 0,$$

то есть, система имеет одну лишнюю связь, аналитический признак сооружения выполнен. Система, имеющая лишнюю

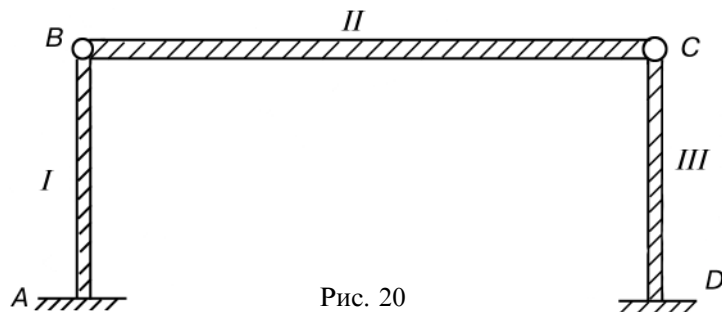


Рис. 20

связь, называется статически неопределимой, так как усилия в такой системе не могут быть определены с помощью только уравнений равновесия (уравнений статики). Геометрический признак для данной системы также соблюден, система неизменяемая, так как диски I и III жестко заделками прикреплены к земле, образуя сложный диск, к которому двумя шарнирами (B и C) прикреплен диск II .

5. ВИДЫ СТЕРЖНЕВЫХ СИСТЕМ

Стержневые системы практически могут быть разделены на четыре типа: балки, арки, рамы и фермы.

Балки. В курсе сопротивления материалов рассматриваются простые консольные и двухопорные шарнирные балки. В курсе строительной механики изучаются многопролетные балки, представляющие собой совокупность простых балок (рис. 21). Эти многопролетные балки делятся на два вида балок: неразрезные (рис. 21, а) и шарнирные (рис. 21, б, в, г).

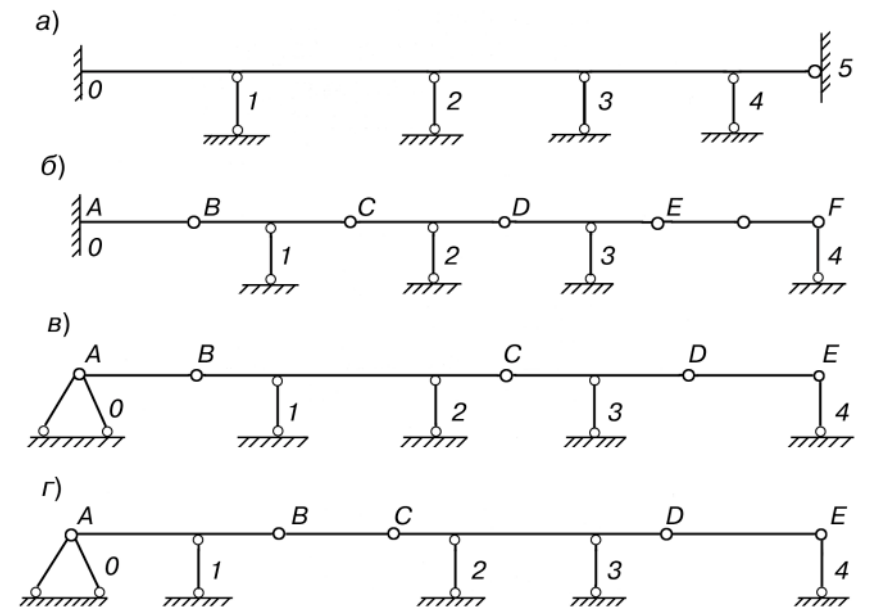


Рис. 21

Пятипролетная неразрезная балка (рис. 21, а) представляет собой один диск, прикрепленный к диску-земля связями-опорами (заделка, шарнир, четыре стержня). Такая балка имеет лишние связи ($W < 0$) и является статически неопределимой. Для рассматриваемой балки $D = 1$, а $C_{\text{оп}} = 9$ и, следовательно, $W = 3 \cdot 1 - 9 = -6$.

Многопролетные шарнирные балки имеют необходимое количество опорных связей ($W = 0$) и являются статически определимыми. Проведем кинематический анализ для балок, изображенных на рис. 21, б, в, г.

Для балки, приведенной на рис. 21, б, число дисков равно пяти ($D = 5$), число шарниров равно четырем ($Ш = 4$) и число опорных связей — семи ($C_{\text{оп}} = 7$). Следовательно, по формуле Чебышева $W = 3 \cdot 5 - 2 \cdot 4 - 7 = 0$, аналитический признак неизменяемости схемы сооружения для данной балки соблюдается. Исследуем геометрию образования рассматриваемой балки, используя так называемую поэтажную схему балки, изображенной на рис. 22, а. Диск AB при помощи заделки A жест-

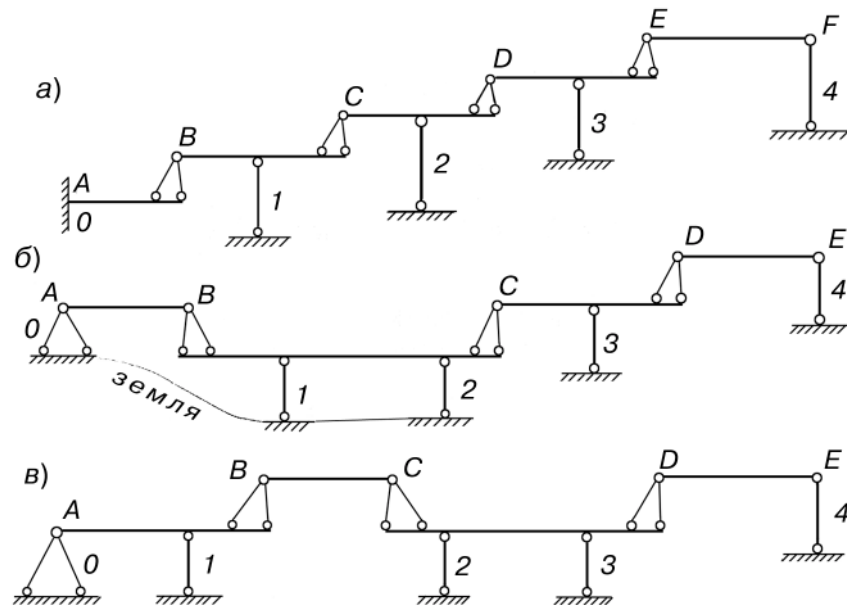


Рис. 22

ко присоединен к земле и составляет с ней единый диск. Балка AB является консольной балкой и условно ее можно назвать балкой первого этажа поэтажной схемы. К земле и балке AB при помощи шарнира B и стержня опоры 1 присоединена балка BC . На поэтажной схеме шарнир B заменен двумя стержнями. Такое закрепление делает балку BC неподвижной относительно земли. Балку BC условно называют балкой второго этажа. Аналогично к земле присоединены и остальные диски многопролетной балки: диск CD (балка третьего этажа) — с помощью шарнира C и стержня опоры 2; диск DE (балка четвертого этажа) — с помощью шарнира D и стержня опоры 3; диск EF (балка пятого этажа) — с помощью шарнира E и стержня опоры 4. Практически имеем последовательное соединение дисков, приведенное на рис. 13. Балка первого этажа (AB) называется анкерной балкой, а балки верхних этажей — подвесными балками.

Многопролетные балки, приведенные на рис. 21, в, г, содержат по четыре диска (AB, BC, CD, DE , то есть $D = 4$), по три шарнира (B, C, D , то есть $Ш = 3$) и прикреплены к земле при помощи пяти опор, содержащих шесть стержней ($C_{\text{оп}} = 6$). Таким образом, $W = 3 \cdot 4 - 2 \cdot 3 - 6 = 0$. Для рассматриваемых балок поэтажные схемы приведены на рис. 22, б, в.

В первой многопролетной балке (см. рис. 21, в) анкерной балкой (балкой первого этажа) будет диск (BC) (рис. 22, б), который прикреплен к земле двумя вертикальными стержнями (опоры 1 и 2). Горизонтальное перемещение балки BC невозможно по следующим соображениям: три диска AB, BC и земля объединены между собой согласно требований, изложенных в параграфе 3 (см. рис. 16). Диски AB и BC присоединены к земле двумя стержнями каждый (опоры 0, 1 и 2), а между собой шарниром B таким образом, что точки пересечения стержней и шарнир не лежат на одной прямой. Следовательно, система из дисков (AB, BC и земля) является геометрически неизменяемой. Присоединение дисков CD и DE (подвесные балки второго и третьего этажа поэтажной схемы) к полученной системе соответствует последовательному присоединению дисков, приведенному на (см. рис. 13).

Многопролетной балке (см. рис. 21, *з*) соответствует поэтажная схема, приведенная на (рис. 22, *в*). Эта балка имеет две анкерные балки (балки первого этажа): AB и CD , а подвесными балками являются — BC и DE . Балка AB при помощи трех стержней, непересекающихся в одной точке, (опоры 0 и 1) присоединена к диску-земля. Сложный диск (балка AB и земля), балка BC и балка CD составляют неизменяемую систему трех дисков, присоединенных друг другу попарно двумя стержнями, точки пересечения которых не лежат на одной прямой (см. поэтажную схему рис. 22, *в*). К этой неизменяемой системе присоединена балка DE шарниром D и стержнем опоры 4 (ось стержня не проходит через шарнир).

Таким образом, схемы многопролетных балок, приведенные на (см. рис. 21, *б, в, з*), являются геометрически неизменяемыми, так как для них оба признака (аналитический и геометрический) соблюдены.

Рамы и арки. Стержневая система, состоящая из прямолинейных стержней, соединенных жесткими и шарнирными узлами, называется *рамой*. Стержневые системы, состоящие из криволинейных стержней, называют, как правило, *арками*.

Схема рамы должна быть неизменяемой и неподвижной относительно земли. Проведем кинематический анализ схем рам, приведенных на рис. 23. Схемы рамы, изображенные на рис. 23, *а, б, в*, содержат по одному диску ($D = 1$), прикрепленному к диску-земля тремя связями ($C_{\text{он}} = 3$), то есть $W = 3 \cdot D - C_{\text{он}} = 3 \cdot 1 - 3 = 0$ и аналитический признак геометрической неизменяемости соблюден. Кроме того, для рассматриваемых рам соблюден и геометрический признак. Для первой рамы (рис. 23, *а*) ее диск жестко соединен с землей при помощи заделки, которая имеет три связи и ликвидирует три степени свободы (две поступательных и одну вращательную). Две другие рамы (рис. 23, *б, в*) жестко соединены с землей при помощи шарнира A и стержня B , причем ось стержня в обоих случаях не проходит через ось шарнира.

Проведем кинематический анализ схем рам, показанных на рис. 23, *г, д, е*. Рама, приведенная на рис. 23, *г*, содержит три диска ($D = 3$), соединенных между собой двумя шарнирами

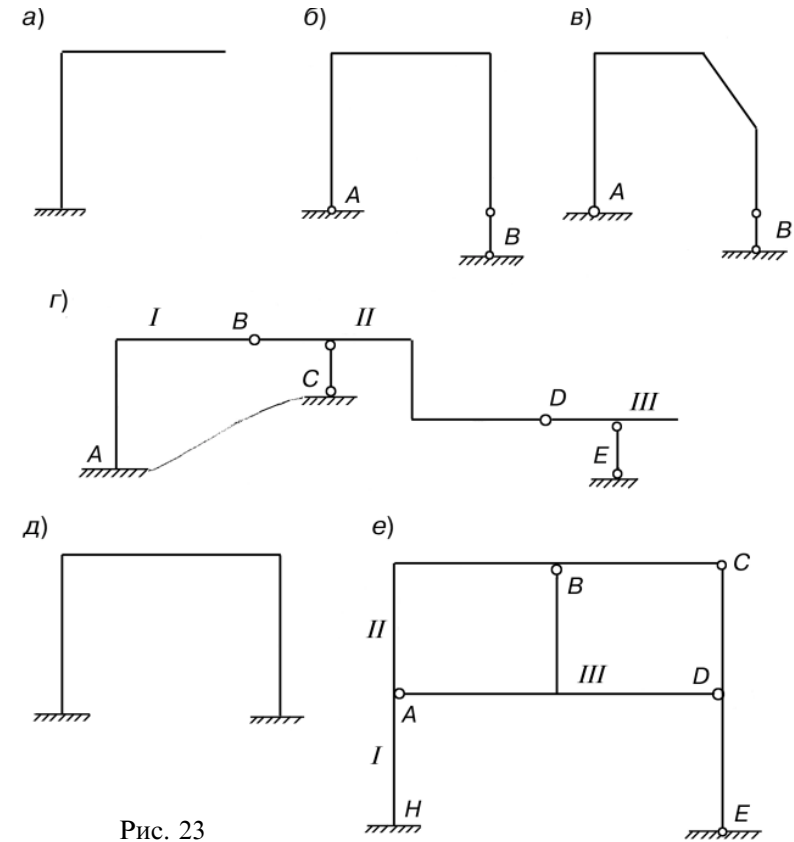


Рис. 23

($III = 2$), и прикрепленных к земле при помощи заделки A и двух стержней C и E ($C_{\text{он}} = 5$). Аналитический признак для этой рамы выполнен, так как $W = 3 \cdot 3 - 2 \cdot 2 - 5 = 0$, то есть число степеней свободы для нее равно нулю. Геометрическое образование данной рамы в точности повторяет образование многопролетной балки, приведенной на рис. 21, *б*, и соответствует последовательному соединению дисков (см. рис. 13).

Схема рамы, приведенной на (рис. 23, *д*), является неизменяемой и статически неопределимой, так как состоит из одного диска ($D = 1$), закрепленного к земле двумя заделками ($C_{\text{он}} = 6$), $W = 3 \cdot 1 - 6 = -3$, рама имеет три «лишних» связи.

Рама, изображенная на рис. 23, *е*, содержит три диска (HA , ABC , $ABCDE$, то есть $D = 3$), объединенных между собой шарнирами A , B , C , причем шарнир A — двойной шарнир, поэтому число простых шарниров равно четырем ($Ш = 4$). К земле рама прикреплена заделкой H (три связи) и шарниром E (две связи), то есть $C_{\text{оп}} = 5$. То есть, $W = 3 \cdot 3 - 2 \cdot 4 - 5 = -4$, рама имеет четыре «лишние» связи. Неизменяемость рамы соблюдена, так как диск HA жестко заделкой присоединен к земле, а к ним при помощи шарнира A и одной из связей в шарнире E (другая в этом смысле — лишняя) прикреплен диск $ABCDE$. К полученной неизменяемой системе при помощи шарнира B и одной связи в шарнире B (другая — лишняя) присоединен диск ABC . Данная рама является четыре раза статически неопределимой. Две связи в шарнире C лишние. Итого четыре лишние связи.

Определение степени статической неопределимости рамы (числа «лишних» связей в раме) можно осуществить другим способом, по следующим соображениям. Схема рамы, как правило, представляют собой совокупность так называемых замкнутых контуров. Так, рама, приведенная на рис. 23, *д*, представляет собой один замкнутый контур, так как стойки жестко соединены с ригелем, а к земле присоединены с помощью двух заделок. Как было выяснено, эта рама имеет три «лишние» связи. Следовательно, замкнутый контур имеет три «лишние» связи, то есть трижды статически неопределим. Рама, приведенная на рис. 23, *б*, тоже содержит один контур, но она присоединена к земле при помощи шарнира и стержня с двумя шарнирами на концах его. Эта рама имеет необходимое количество связей и является статически определимой. Сравнивая эти две рамы, можно сделать вывод, что ведение одного шарнира удаляет одну связь. Следовательно, замкнутый контур, содержащий три шарнира, которые не лежат на одной прямой, является геометрически неизменяемой статически определимой системой. Используя изложенное, определение степени статической неопределимости рам, то есть числа лишних неизвестных, можно осуществить по следующей формуле:

$$n = 3K - Ш, \quad (4)$$

где K — число замкнутых контуров в раме;
 $Ш$ — число простых шарниров в раме.

Используем формулу (4) для определения числа лишних неизвестных в раме, приведенной на рис. 23, *е*. Число контуров в раме равно трем ($K = 3$), а число простых шарниров равно пяти (три простых шарнира B , C , E и двойной шарнир A , $Ш = 5$), следовательно:

$$n = 3 \cdot 3 - 5 = 4.$$

Это соответствует результату, полученному ранее по формуле (2), то есть число степеней свободы $W = -4$ соответствует числу лишних связей $n = 4$.

Рама, состоящая из криволинейных стержней, называется аркой. Арки применяются для перекрытия больших пролетов. На рис. 24 приведены некоторые виды арок. На рис. 24, *а* приведена трехшарнирная арка, имеющая необходимое количество связей, то есть она является статически определимой. На рис. 24, *б* приведена двухшарнирная арка, имеющая одну лишнюю связь, то есть она является один раз статически неопределимой. На рис. 24, *в* приведена бесшарнирная арка, имеющая три лишние связи, то есть она является трижды статически неопределимой. Арки находят широкое применение в мостостроении. Для осуществления движения транспорта по арочному мосту устраивается, так называемое, надарочное строение в виде системы балок, по которым устраивается проезжая часть. На рис. 9 приведена схема арочного моста, представляющая собой трехшарнирную арку с надарочным строением.



Рис. 24

Фермы. Для перекрытия больших пролетов, кроме арок, применяются фермы. Ферма состоит из двух поясов, объединенных в единую конструкцию при помощи решетки (раскосов, стоек и подвесок). На рис. 8, 12, 17 и 19 приведены стержневые системы, которые можно считать фермами. Фермы могут быть металлическими и железобетонными. В узлах фермы стержни соединены между собой жестко. Стержни металлических ферм имеют, как правило, значительные длины, и, как показали расчеты, с достаточной для практики точностью узлы фермы можно считать шарнирными. Фермы с шарнирными узлами называются идеализированными конструкциями.

Фермы широко применяются в качестве несущих конструкций. По своему назначению фермы могут быть: стропильными, служащими для поддержания крыши здания; подкрановыми, используемыми для перемещения грузового крана (рис. 25, а); мостовыми — с «ездой понизу» (рис. 25, б) и с «ездой поверху» (рис. 25, в) и т.д.

Фермы по очертанию поясов бывают *полигональными* (рис. 25, б) и с *параллельными поясами* (рис. 25, в). По типу решетки они делятся на фермы с *треугольной* решеткой (рис. 25, а, в), фермы с *полураскосной* решеткой (рис. 25, б) и т.д.

Исследуем образование стержневой системы, показанной на рис. 26. Эта система состоит из двух ферм (ферма *АС* и ферма *СD*) и присоединена к диску-земля при помощи опор *A*, *B* и *D*, содержащих четыре опорных стержня ($C_{оп} = 4$). Обе фермы системы имеют 19 узлов ($U = 19$), объединенных между собой тридцатью четырьмя внутренними связями ($C = 34$). По формуле (3) определяем число степеней свободы системы:

$$W = 2 \cdot 19 - 34 - 4 = 0,$$

т.е. система обладает необходимым числом связей и может быть сооружением (аналитический признак сооружения выполнен).

Геометрический признак сооружения также выполняется для заданной системы. Ферма *I (АС)* является неизменяемым диском, так как имеет треугольную решетку, и неподвижна по отношению к земле, ибо присоединена к ней при помощи

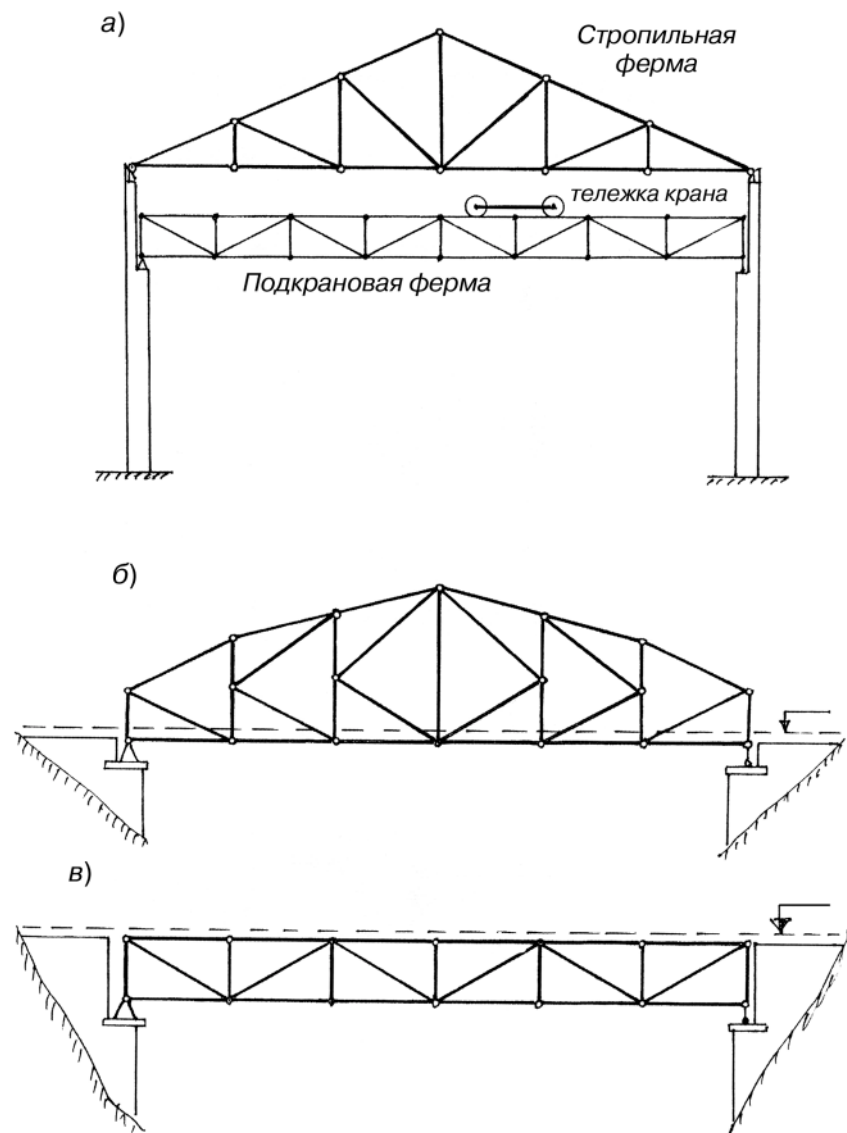


Рис. 25

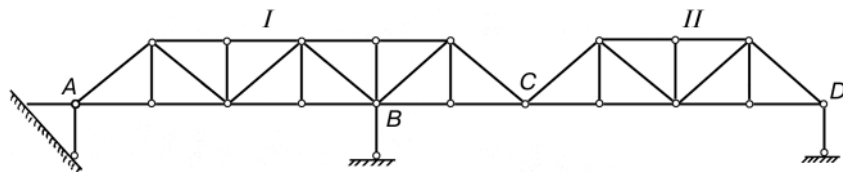


Рис. 26

трех стержней (опоры A и B), не пересекающихся в одной точке. Ферма II (CD) также является неизменяемым диском, так как тоже имеет треугольную решетку. Она неподвижна по отношению к земле, так как присоединена к неподвижной ферме AC при помощи шарнира C и к земле при помощи стержня опоры D , непроходящего через шарнир C .

РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Леонтьев Н.Н., Соболев Д.Н., Амосов А.А. Основы строительной механики стержневых систем. — М.: АСВ, 1996. — 541 с.
2. Смирнов А.Ф., Александров А.В., Лащеников Б.Я., Шапошников Н.Н. Строительная механика. Стержневые системы: Учебник для вузов. — М.: Стройиздат, 1981. — 512 с.
3. Дарков А.В., Шапошников Н.Н. Строительная механика. Учебник для строит. спец. вузов. 8–2 изд., перераб. и доп. — М.: Высшая школа, 1986. — 607 с.
4. Рабинович И.М. Основы строительной механики стержневых систем. — М.: Гос. изд-во литературы по строительству, архитектуре и строительным материалам, 1960. — 520 с. с ил.