

21/2/3

Одобрено кафедрой
«Сопротивление материалов
и строительная механика»

СТРОИТЕЛЬНАЯ МЕХАНИКА

Задания на контрольные работы
для студентов III и IV курсов

специальностей

290300 ПРОМЫШЛЕННОЕ И ГРАЖДАНСКОЕ
СТРОИТЕЛЬСТВО (ПГС)

290900 СТРОИТЕЛЬСТВО ЖЕЛЕЗНЫХ ДОРОГ,
ПУТЬ И ПУТЕВОЕ ХОЗЯЙСТВО (С)

291100 МОСТЫ И ТРАНСПОРТНЫЕ ТОННЕЛИ (МТ)



Задания на контрольные работы по «Строительной механике» являются результатом переработки ранее изданных заданий с учетом изменений в учебных планах и программах по этой дисциплине.

С о с т а в и т е л и : канд. техн. наук, проф. Л.Ю. КУЗЬМИН, канд. техн. наук, проф. В.Н. СЕРГИЕНКО, канд. техн. наук, доц. Ю.Е. ЛОЗОЦЕВ, доц. А.Б. ЯГУБОВ, ст. преподаватель Е.А. ЯМЩИКОВА

Р е ц е н з е н т — канд. техн. наук, проф. ЗАЙЦЕВ Б.В.

ОБЪЕМ И СОДЕРЖАНИЕ КОНТРОЛЬНЫХ РАБОТ

При изучении курса «*Строительная механика*» студент-заочник знакомится с существующими методами расчета сооружений на прочность, устойчивость, жесткость и приобретает навыки в выполнении таких расчетов. Если в «Сопротивлении материалов» предметом изучения служат отдельные элементы сооружений, то в «Строительной механике» предметом изучения являются целые сооружения (вернее расчетные схемы сооружений).

Основными документами, определяющими необходимый объем знаний студентов, являются учебные программы курсов и учебные планы по специальности.

Процесс получения студентами знаний и навыков складывается из самостоятельного изучения соответствующих разделов курса по учебникам [1; 2] и выполнению контрольных работ, индивидуальные задания которых помещены в настоящем задании.

Если при изучении курса или при выполнении контрольной работы встретятся затруднения, студент может воспользоваться устной консультацией преподавателя в вузе, филиале, факультете.

Исходные данные для решения задач контрольных работ студенты должны брать из таблиц, приведенных в данном задании, в строгом соответствии во своим личным номером. Для этого надо три последние цифры своего шифра написать дважды, а затем под шестью цифрами подписать буквы: *a, б, в, г, д, е*.

Например, при шифре 99-В-315437 это будет выглядеть так:

$$\begin{array}{cccccc} 4 & 3 & 7 & 4 & 3 & 7 \\ a & б & в & г & д & е \end{array}$$

Тогда цифра над буквой *a* укажет, какую строку следует взять из столбца *a*, над буквой *б* — из столбца *б* и т.д.

Контрольные работы следует выполнять в тетрадах, имеющих поля. Все расчеты рекомендуется проводить с точностью до трех значащих цифр и сопровождать необходимыми (строго в масштабе) расчетными схемами и краткими пояснениями. Страницы тетради должны быть пронумерованы. Кроме того, в тетради должны быть указаны домашний адрес, номер шифра, список используемой литературы с указанием года издания. Работа должна быть подписана студентом.

Выполненная контрольная работа должна быть сдана на факультет, записана в журнал. После этого преподаватель кафедры проверяет контрольную работу и, в случае правильного решения задач, ставится пометка «допущена к защите». Допущенные к зачету контрольные работы должны быть защищены студентом при собеседовании с преподавателем. При этом на обложке контрольной работы должна быть запись преподавателя «контрольная работа зачтена».

Задания на контрольные работы по дисциплине «Строительная механика» соответствуют существующему учебному плану 2000 г. по этой дисциплине.

Перечень и количество контрольных работ, выполняемых студентами специальностей *ПГС, С, МТ* указаны в табл. 1.

Таблица 1

Дисциплина	Курс	Номера		
		Контрольных работ	Задач	
Строительная механика	3	1	1, 2	
		2	3, 4	
		3	5, 6	
	4	4	ПГС, С	7
			МТ	7, 8

РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА

Основная

1. Леонтьев Н.Н., Соболев Д.Н., Амосов А.А. Основы строительной механики стержневых систем. — М.: АСВ, 1996, — 541 с.

2. Смирнов А.Ф., Александров А.В., Лащеников Б.Я., Шапошников Н.Н. Строительная механика. Стержневые системы: Учебник для вузов. — М.: Стройиздат, 1981, — 512 с.

Дополнительная

3. Александров А.В., Лащеников Б.Я., Шапошников Н.Н. Строительная механика. Тонкостенные и пространственные системы. Учебник для вузов. — М.: Стройиздат, 1983, — 488 с.

4. Смирнов А.Ф., Александров А.В., Лащеников Б.Я., Шапошников Н.Н. Строительная механика. Динамика и устойчивость. Учебник для вузов. — М.: Стройиздат, 1984, — 416 с.

5. Смирнов А.Ф., Иванов С.А., Тихонов М.А. Строительная механика. Учебник для вузов. — М.: Стройиздат, 1984, — 208 с.

6. Дарков А.В., Шапошников Н.Н. Строительная механика. Учебник для строит. спец. вузов. 8-2 изд., перераб. и доп. — М.: Высшая школа, 1986, — 607с.

7. Кузьмин Л.Ю., Сергиенко В.Н. Строительная механика. Решение задач на ЭВМ. Методические указания. — М.: РГОТУПС, 2002.

Задача № 1

РАСЧЕТ МНОГОПРОЛЕТНОЙ ШАРНИРНОЙ БАЛКИ

Пятиопорная шарнирная балка (рис.1) состоит из четырех балок (дисков), соединенных тремя шарнирами, указанными на схемах балок.

Балка загружена по всей длине расчетной равномерно распределенной нагрузкой q . Расстояние сечений 1, 2, 6, 7, 11, 12, 16, 17, 21, 22 до ближайших опор следует считать исчезающе малыми.

Требуется:

1. Вычертить в масштабе схему шарнирной балки, ее расчетную (поэтажную) схему, указать размеры в метрах, после чего вспомогательную нумерацию сечений с 1 по 22 можно опустить, оставив согласно варианту только нумерацию исследуемых сечений.
2. Проверить геометрическую неизменяемость системы.
3. Построить восемь линий влияния:
 - а) линию влияния реакции крайней левой опоры;
 - б) линию влияния реакции средней опоры;
 - в) три линии влияния изгибающего момента и три линии влияния поперечной силы, возникающих в исследуемых сечениях (см. последний столбец «д» табл. 2).

Построение линий влияния следует сопровождать краткими пояснениями и необходимыми расчетными схемами.

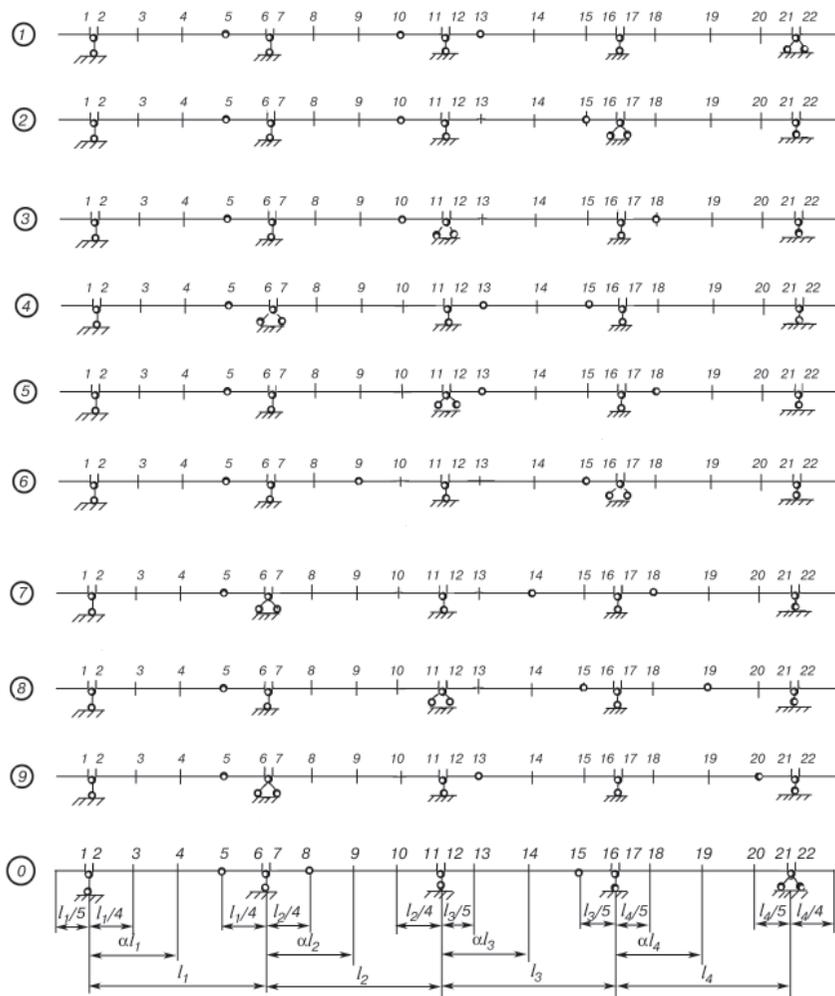


Рис. 1

- Аналитически вычислить величину реакции крайней левой опоры, поперечной силы и изгибающего момента в исследуемом сечении первой балки, а также построить эпюры Q и M для этой балки.

- С помощью линий влияния, построенных согласно п. 3, проверить реакцию, поперечную силу и изгибающий момент, полученные аналитически по п. 4.
- По величине M_{\max} для первой балки подобрать из условия прочности двутавровое сечение балки по ГОСТ 8239-72, $R_u = 200$ МПа (сталь).

Исходные данные взять из табл. 2.

Таблица 2

Номер строки	Схема (рис.1)	l_1 , м	l_2 , м	l_3 , м	l_4 , м	α	q , кН/м	Исследуемые сечения
1	1	16	15	7	14	0,5	14	3-12-21
2	2	18	14	8	13	0,6	14	4-16-17
3	3	20	13	9	12	0,7	13	3-11-16
4	4	22	12	10	11	0,6	13	4-12-22
5	5	15	11	11	10	0,5	12	3-6-17
6	6	18	10	12	9	0,6	12	4-7-16
7	7	16	9	13	8	0,5	11	3-11-17
8	8	20	8	14	7	0,6	11	4-7-12
9	9	20	7	15	6	0,7	10	3-16-22
0	0	15	6	16	5	0,5	10	4-12-21
	e	δ	z	a	b	\bar{a}	a	$\bar{\delta}$

Задача № 2

РАСЧЕТ ФЕРМЫ НА ПОСТОЯННУЮ И ВРЕМЕННУЮ НАГРУЗКИ

Студенты специальностей *МТ* и *ПГС* выполняют задачу № 2 для шпренгельной фермы (рис. 2), студенты специальности *С* — для простой фермы (рис. 3).

Для фермы (рис. 2 и 3) требуется:

- Вычертить расчетную схему фермы полностью (в масштабе).
- От собственного веса фермы q , равномерно распределенного по всей длине, определить аналитически усилия в пяти элементах фермы, указанных в табл. 3.

Исходные данные взять из табл. 3.

3. Построить линии влияния усилий в тех же элементах. Для всех линий влияния определить числовые значения характерных ординат.

4. Линии влияния усилий в элементах фермы загрузить постоянной нагрузкой от собственного веса фермы интенсивностью q и сравнить с результатами, полученными в п. 2.

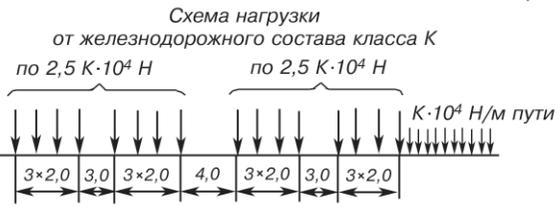
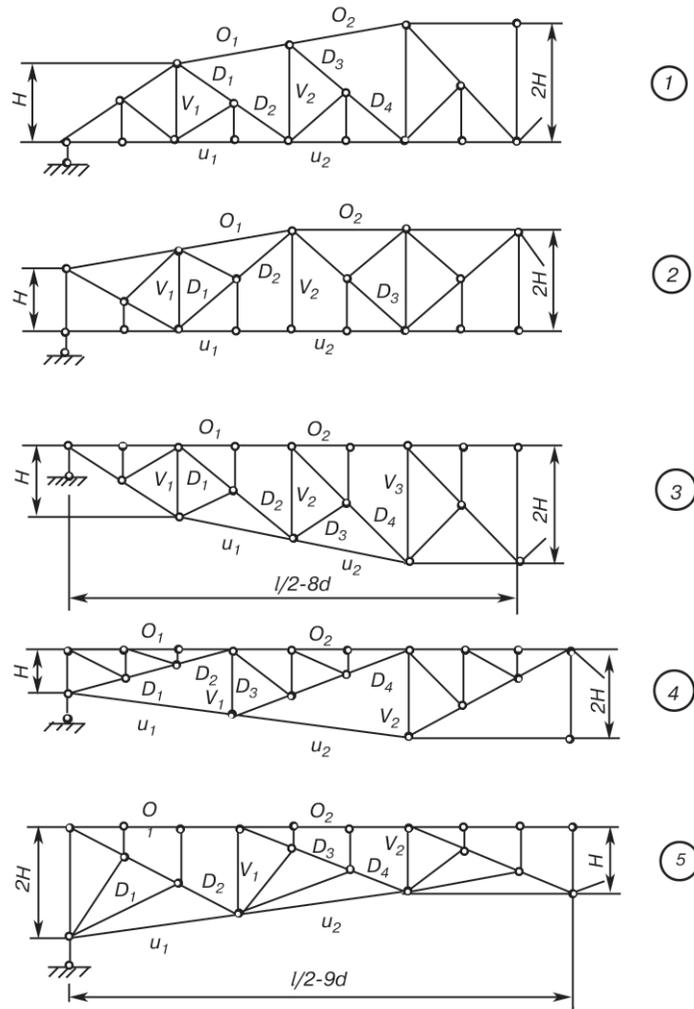


Рис. 2

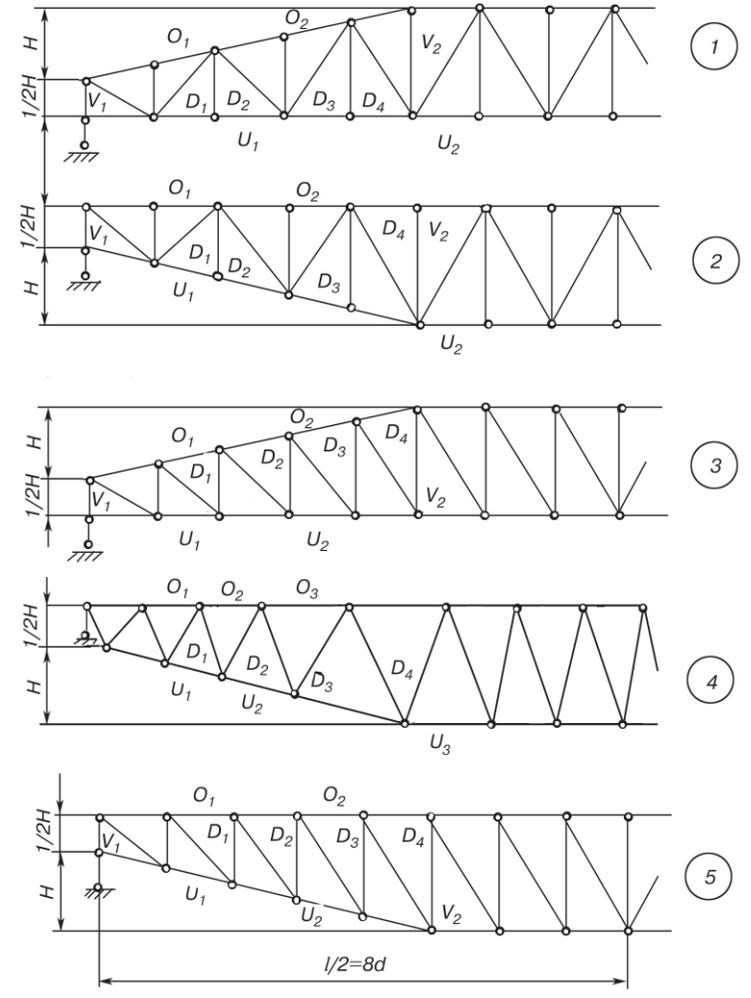


Рис. 3

5. *Треугольную линию влияния усилия в стержне одного из поясов фермы загрузить нагрузкой подвижного состава и вычислить эквивалентную нагрузку.

* Пункты 5 и 6 задания выполняется студентами специальности С и МТ

Таблица 3

Номер		q , кН/м	d , м	$\frac{H}{d}$	Элементы						Класс нагрузки K	
строки	схемы				U_1	O_1	D_1	D_2	V_1	U_2		O_2
1	1	4,0	4,8	1,1	U_1	O_1	D_1	D_2	V_1			10
2	2	4,5	5,0	1,2	U_2	O_2	D_3	D_4	V_2			11
3	3	5,0	5,2	1,3	U_1	O_1	D_1	D_2	V_1			12
4	4	5,5	5,4	1,4	U_1	O_1	D_1	D_2	V_1			13
5	5	6,0	5,6	1,5	U_2	O_2	D_3	D_4	V_2			14
6	1	4,0	5,8	1,6	U_2	O_2	D_3	D_4	V_2			10
7	2	4,5	6,0	1,7	U_1	O_1	D_1	D_2	V_1			11
8	3	5,0	6,4	1,8	U_2	O_2	D_3	D_4	V_2			12
9	4	5,5	6,6	1,9	U_1	O_1	D_1	D_2	V_1			13
0	5	6,0	6,8	2,0	U_2	O_2	D_3	D_4	V_2			14
e		δ	ε	ζ	β	a	e	δ	ε			a

6*. С помощью табл. 4 определить нормативную эквивалентную нагрузку класса K , и сравнить с результатами, полученными в п. 5. Промежуточные табличные данные следует брать по двойной интерполяции, т.е. по λ и α .

Предлагается, что езда осуществляется по прямолинейному поясу фермы.

Таблица 4

Длина линии влияния λ , м	Эквивалентные нагрузки $q_{эк}$, кН/м пути при классе $K=1$	
	$\alpha = 0$	$\alpha = 0,5$
1	50,00	50,00
5	20,77	18,17
10	17,81	15,58
20	15,05	13,17
30	13,36	11,69
40	12,25	10,72
50	11,51	10,07
60	11,01	10,10
80	10,46	10,00
100	10,20	10,00
120	10,09	10,00
140	10,04	10,00

Примечание: λ — длина линии влияния, м;

$\alpha = \frac{a}{\lambda}$ — положение вершины линии влияния;

a — проекция наименьшего расстояния от вершины до конца линии влияния, м.

Задача № 3

РАСЧЕТ ПЛОСКОЙ РАМЫ МЕТОДОМ СИЛ В МАТРИЧНОЙ ФОРМЕ С ПОМОЩЬЮ ПЭВМ

Для статически неопределимой рамы (в дальнейшем рама № 1) (рис. 4) требуется:

1. Вычислить вектор изгибающих моментов и построить эпюру моментов отдельно от нагрузки q .

2. Вычислить вектор изгибающих моментов и построить эпюру моментов отдельно от нагрузки P .

3. Изменить схему рамы, добавив вертикальную шарнирно-подвижную опору в точке, где на заданной схеме приложена сила P — создать раму № 2.

4. Для новой рамы вычислить вектор изгибающих моментов и построить эпюру моментов от нагрузки q .

5. Для рамы № 2 от действия нагрузки q построить эпюры Q , N и проверить равновесие рамы в целом.

6. Сравнить работу обеих рам.

Исходные данные взять из табл. 5.

Таблица 5

Номер		l , м	h , м	P , кН	q , кН	$\frac{J_p}{J_c}$
строки	схема					
1	1	5,0	3,0	30	8	2,00
2	2	4,5	3,2	35	10	1,80
3	3	4,2	3,4	40	12	1,60
4	4	4,0	3,5	45	14	1,50
5	5	3,8	3,6	50	15	1,25
6	6	3,6	3,8	55	16	1,20
7	7	3,5	4,0	60	18	1,00
8	8	3,4	4,2	65	20	0,80
9	9	3,2	4,5	70	22	0,75
0	0	3,0	5,0	75	24	0,50
e		a	b	v	ε	δ

Методические указания к решению задачи № 3 с помощью ПЭВМ

1. Подготовить раму к расчету в матричной форме: разделить раму на участки, отметить начало и конец каждого участка сечением с соответствующим номером и для каж-

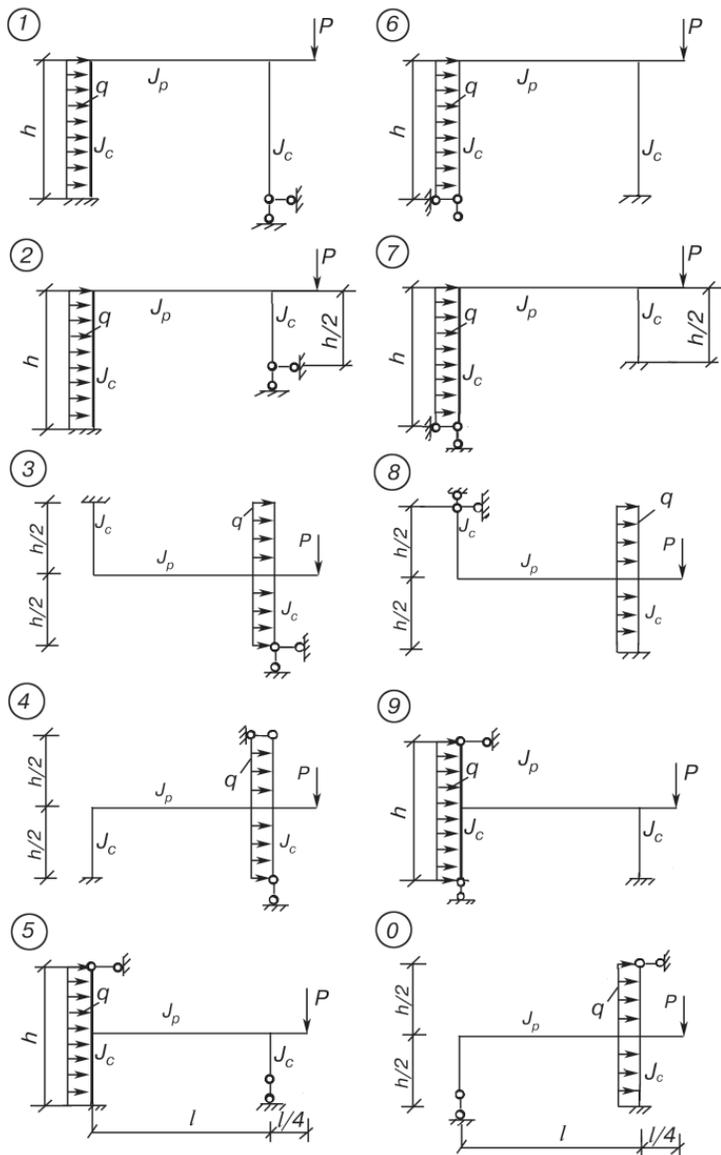


Рис. 4

ного участка выбрать правило знаков для ординат эпюр изгибающих моментов, построенных со стороны растянутых волокон.

2. Нумерацию начинать с участков, где $q \neq 0$.
3. Расчет рамы № 1 в п. 1 и 2 следует проводить по матричному алгоритму [7 п. 3] с помощью электронного редактора EXCEL по готовой программе в файле МЕТСИЛ.xls. Матричный алгоритм [7 п. 3] показан на дисплее в ячейках электронной таблицы.
4. Расчет рамы № 2 следует проводить методом сил с помощью программы в файле МЕТСИЛ1.xls, как систему с одним неизвестным, приняв за основную систему исходную статически неопределимую раму № 1, рассчитанную в п. 1, 2 и 3.

Задача № 4

РАСЧЕТ НЕРАЗРЕЗНОЙ БАЛКИ ПОСТОЯННОГО ПОПЕРЕЧНОГО СЕЧЕНИЯ С ПОМОЩЬЮ ПЭВМ НА ПОСТОЯННУЮ И ВРЕМЕННУЮ НАГРУЗКИ

Для балки (рис. 5) требуется:

1. С помощью программы для электронной таблицы EXCEL в файле НЕРАЗР.xls вычислить ординаты линий влияния опорных изгибающих моментов и моментов в серединах пролетов.
2. Построить линии влияния опорных изгибающих моментов M_{i-1}, M_i , а также линию влияния изгибающего момента в сечении $0,5l_i$ (номер пролета i — задается по шифру).
3. С помощью линий влияния п. 2 определить величины изгибающих моментов M_{i-1}, M_i и $0,5l_i$ от заданной постоянной нагрузки.
4. От заданной постоянной нагрузки и временной равномерно распределенной (возможно с разрывами) нагрузки интенсивностью $q=10$ кН/м построить объемлющую эпюру изгибающих моментов для пролета с номером i .

Исходные данные взять из табл. 6.

Таблица 6

Номер		l_1 , м	l_2 , м	l_3 , м	P , кН	P_1 , кН	P_2 , кН	P_3 , кН	q_1 , кН	q_2 , кН	q_3 , кН	i
строки	схемы											
1	1	3,0	3,2	3,0	4,0	0	28,0	0	18,0	0	18,0	1
2	2	3,6	3,5	3,5	5,0	24,0	0	24,0	0	14,0	0	2
3	3	4,2	4,0	3,8	6,0	0	24,0	0	12,0	0	12,0	3
4	4	4,5	4,5	4,2	8,0	20,0	0	20,0	0	8,0	0	1
5	5	4,8	5,0	4,8	6,0	0	20,0	0	7,5	0	7,5	2
6	1	5,4	5,6	5,1	4,0	16,0	0	16,0	0	7,5	0	3
7	2	6,0	6,0	5,5	5,0	0	16,0	0	4,8	0	6,4	1
8	3	6,6	6,5	6,0	6,0	12,0	0	12,0	0	4,8	0	2
9	4	7,2	7,5	6,4	8,0	0	12,0	0	4,0	0	4,5	3
0	5	7,5	8,0	7,2	4,0	8,0	0	8,0	0	3,6	0	2
	<i>e</i>	<i>a</i>	<i>б</i>	<i>в</i>	<i>г</i>	<i>а</i>	<i>б</i>	<i>в</i>	<i>а</i>	<i>б</i>	<i>в</i>	<i>д</i>

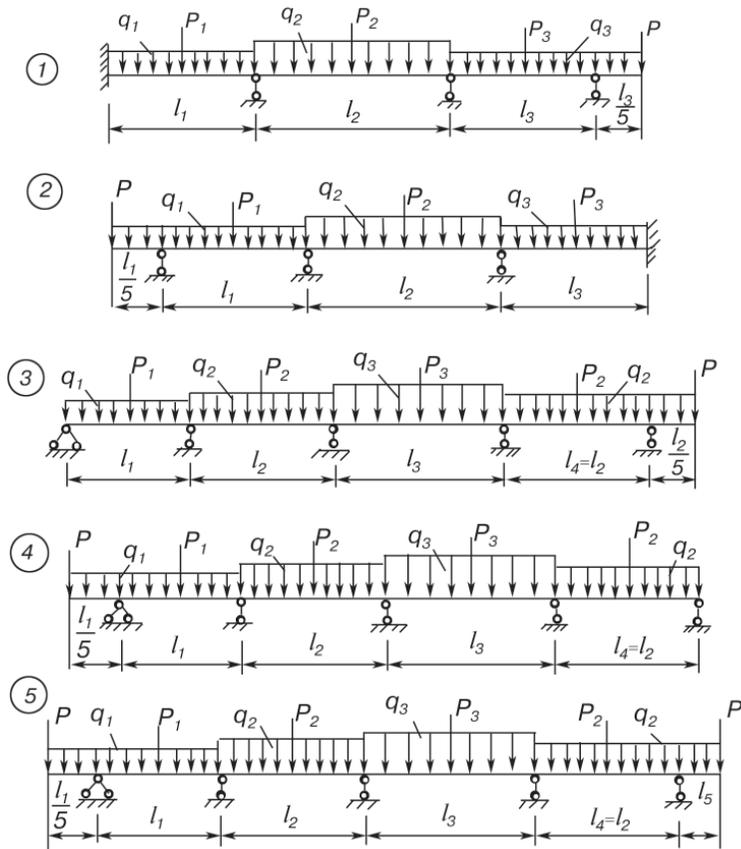


Рис. 5

Методические указания к решению задачи № 4

1. Статически неопределимая балка рассчитывается методом сил [7, п. 3.2]. Основная система образуется врезанием полных шарниров над промежуточными опорами.

2. В основе алгоритма программы НЕРАЗР.xls положена схема № 5 (рис. 5), которая размечена слева направо 19-ю сечениями: по одному на консолях и через $0,25l_i$ каждого пролета.

Пролеты схемы № 5 обозначим C_1 — левая консоль, $L_1 = l_1$, $L_2 = l_2$, $L_3 = l_3$, $L_4 = l_4$, C_2 — правая консоль.

Эквивалентные системы для схем № 1–4 могут быть получены из схемы № 5, обнулением соответствующих консолей и про-

летов. Например, схема № 2 будет эквивалентна схеме № 5, если принять $L_4 = 0$ и $C_2 = 0$.

Например, схема № 1 будет эквивалентна схеме № 5, если принять $C_1 = 0$, $L_1 = 0$, $L_2 = l_1$; $L_3 = l_2$, $L_4 = l_3$, $C_2 = \frac{l_3}{5}$.

3. В программе автоматически устанавливается единичная сила в отмеченных точках и проводится расчет статически неопределимой системы. Величины неизвестных опорных моментов показываются на экране в виде столбцов, образующих матрицу влияния опорных моментов. Строки этой матрицы представляют ординаты линий влияния соответствующих опорных моментов.

4. Построение огибающей эпюры следует проводить в соответствии с [7, п. 3.2.2].

Задача № 5

РАСЧЕТ ПЛОСКОЙ РАМЫ МЕТОДОМ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ В МАТРИЧНОЙ ФОРМЕ С ПОМОЩЬЮ ПЭВМ

Для статически неопределимой рамы (рис. 6) требуется:

1. Подготовить схему рамы к расчету в матричной форме (см. п.1 методических указаний к задаче № 3).

2. Определить число неизвестных и выбрать основную систему метода перемещений.

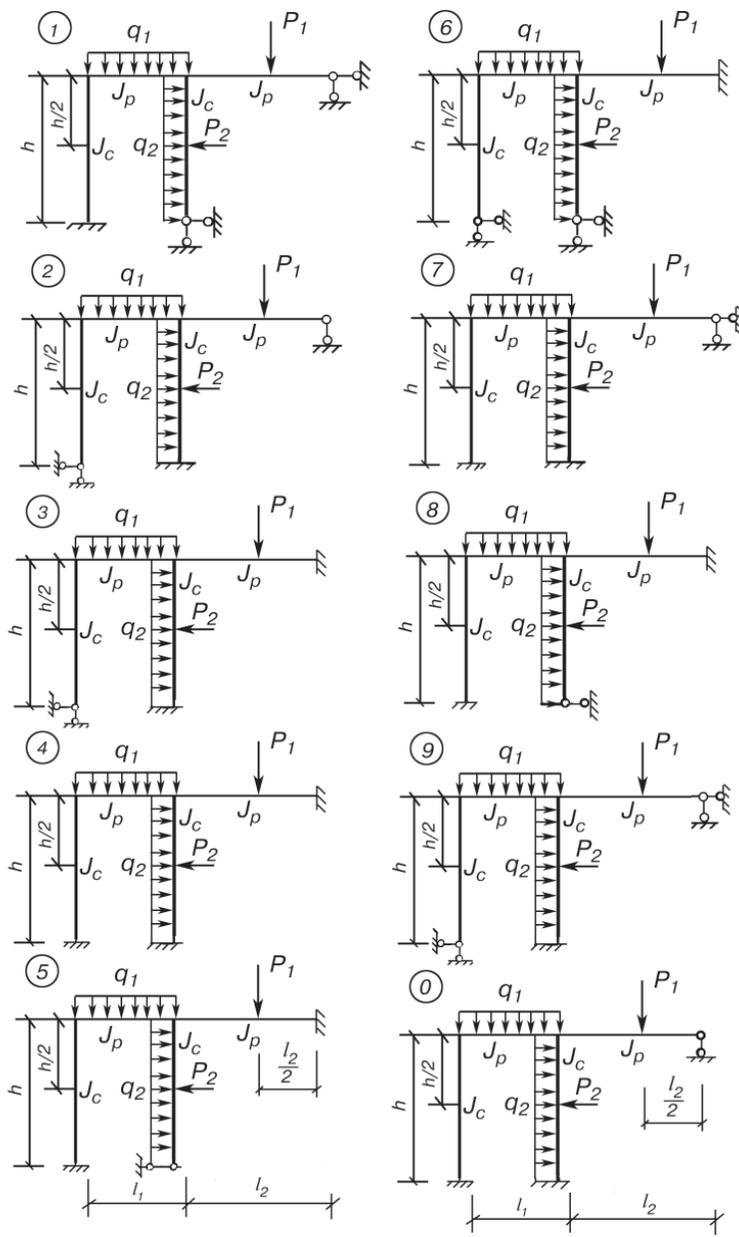


Рис. 6

3. Построить необходимые единичные M_i и грузовые эпюры M_p изгибающих моментов в основной системе и записать их в виде матриц столбцов

$$L_m = [\bar{M}_1; \bar{M}_2] \bar{M}_p$$

4. Вычислить приведенные податливости каждого участка

$$K_i = \frac{l_i E J_c}{6 E J_i}$$

5. Записать систему канонических уравнений метода перемещений в матричной форме и вычислить ее коэффициенты.

6. Решить полученную систему канонических уравнений.

7. Получить вектор окончательной эпюры изгибающих моментов M и построить эпюру.

8. Построить окончательные эпюры поперечных Q и продольных N сил.

9. Проверить полученные результаты, осуществив деформационную и статические проверки.

Примечание. При решении задачи № 5 в схемах на рис. 6 нагрузку на раму принимать в сочетаниях q_1 с P_2 или q_2 с P_1 (по выбору).

Исходные данные взять из табл. 7.

Таблица 7

Номер		h , м	l_1 , м	P_1 , кН	q_1 , кН/м	$\frac{l_2}{l_1}$	$\frac{P_2}{P_1}$	$\frac{q_2}{q_1}$	$\frac{J_p}{J_c}$
строки	схемы								
1	1	5,0	3,0	15	2	1,00	0,6	0,85	1,20
2	2	4,8	3,2	20	2	1,10	0,8	0,80	1,25
3	3	4,4	3,4	25	2	1,15	1,0	0,75	1,30
4	4	4,2	3,6	30	4	1,20	0,6	1,70	1,40
5	5	4,0	3,8	35	4	1,25	0,8	0,85	1,50
6	6	3,8	4,0	40	4	1,30	1,0	1,80	1,60
7	7	3,6	4,2	45	2	1,35	0,6	0,75	1,70
8	8	3,4	4,4	50	2	1,40	0,8	0,70	1,75
9	9	3,2	4,8	55	2	1,45	1,0	0,85	1,80
0	0	3,0	5,0	60	2	1,50	0,8	0,80	2,00
	<i>e</i>	<i>a</i>	<i>б</i>	<i>в</i>	<i>г</i>	<i>д</i>	<i>a</i>	<i>б</i>	<i>в</i>

Методические указания к решению задачи № 5

Выполнение п. 5–7 проводится с помощью программы МЕТПЕРЕМСЕРВИС.xls для электронной таблицы EXCEL по алгоритму, приведенному в [7, п. 4.1.5]:

1. Система канонических уравнений метода перемещений

$$R \cdot \vec{Z} = -\vec{R}_p.$$

2. Матрица единичных реакций

$$R = L_m^T \cdot B \cdot L_m.$$

3. Элементы вектора \vec{R}_p грузовых реакций определяются статическим способом (вырезанием узлов или частей основной системы).

4. Определение неизвестных перемещений

$$\vec{Z} = -R^{-1} \cdot \vec{R}_p.$$

5. Вычисление вектора окончательной эпюры моментов

$$\vec{M} = \vec{M}_p + L_m \cdot \vec{Z}.$$

Все промежуточные матрицы показаны на экране в ячейках электронной таблицы.

Задача № 6

РАСЧЕТ РАМЫ НА УСТОЙЧИВОСТЬ МЕТОДОМ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ

Для рамы, представленной на рис. 7, требуется:

1. Показать возможные формы потери устойчивости рассматриваемой рамы.

2. Определить критические значения силы для случаев, когда $P_1 = P$, $P_2 = 0$; $P_1 = 0$, $P_2 = P$; $P_1 = P_2 = P$.

Исходные данные взять из табл. 8.

Задача решается ручным способом и ПЭВМ.

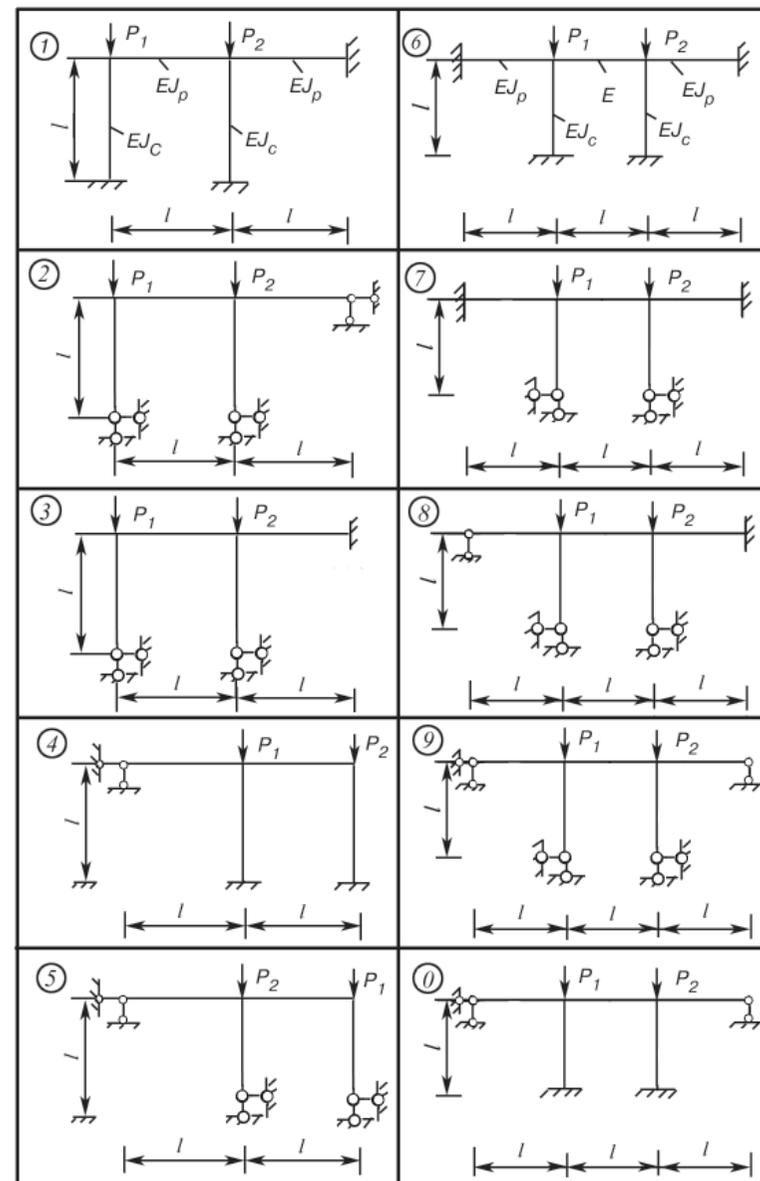


Рис. 7

Таблица 8

Номер строки	Номер схемы	$l, \text{ м}$	$\frac{EJ_p}{EJ_c}$	$EJ_c, \text{ кНм}^2$
1	1	4	1	2000
2	2	6	2	3000
3	3	8	3	4000
4	4	4	4	5000
5	5	6	1	6000
6	6	8	2	2000
7	7	4	3	3000
8	8	6	4	4000
9	9	8	1	5000
0	0	4	2	6000
	<i>e</i>	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>в</i>

Методические указания к выполнению задачи № 6

1. При расчете рамы методом перемещений для сжатых стоек нужно учитывать влияние продольных сил на величину реакций в связях основной системы метода перемещений с помощью трансцендентных функций $\Phi(v)$, где $v = l\sqrt{\frac{P}{EJ_c}}$ (см. прил. 1).

2. Программа расчета с помощью электронной таблицы EXCEL находится в УСТ.xls.

Задача № 7

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЧАСТОТ И ФОРМ СОБСТВЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ СТЕРЖНЕВОЙ СИСТЕМЫ С КОНЕЧНЫМ ЧИСЛОМ СТЕПЕНЕЙ СВОБОДЫ

Для рамы из двутавра с двумя сосредоточенными массами (рис. 8) требуется:

1. Определить сосредоточенные массы из условия, что каждая сосредоточенная масса в 10 раз больше массы участка рамы (стойки или ригеля), где находится эта масса.

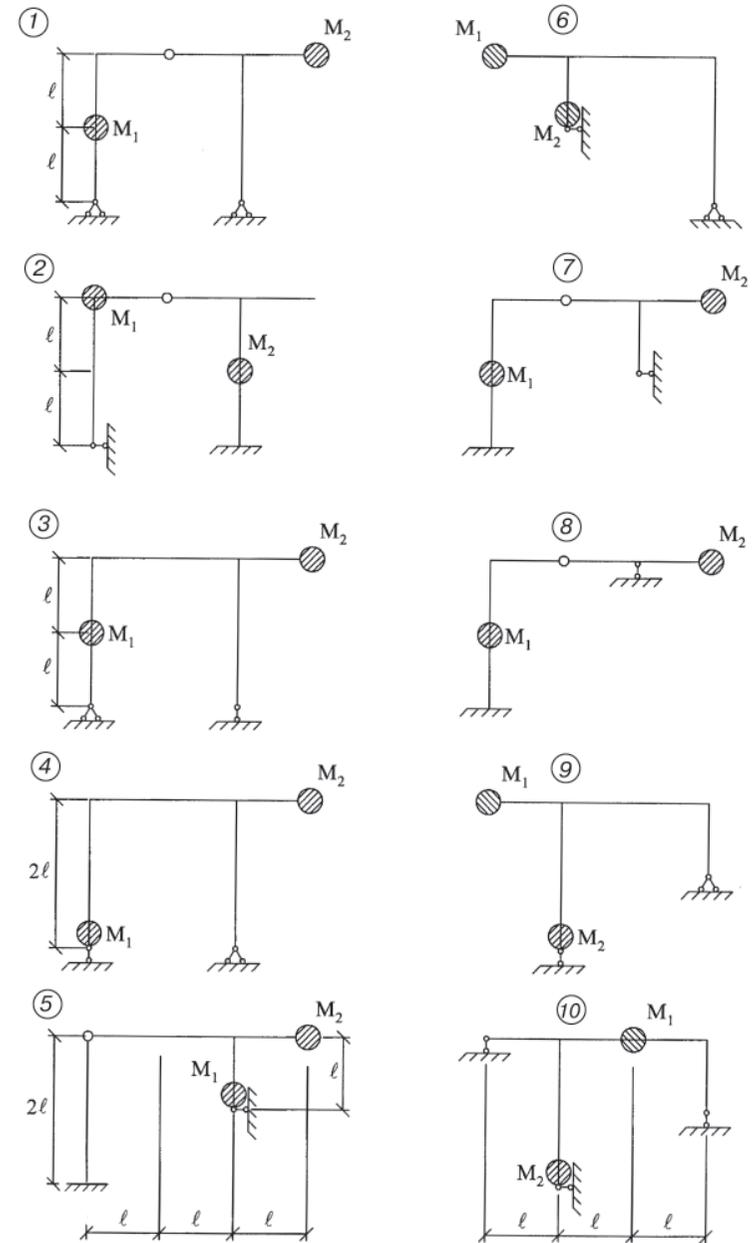


Рис. 8

2. Определить число степеней свободы, пронумеровать перемещения, определяющие положения масс при колебаниях (сформировать вектор перемещений \vec{Y}).

3. Записать систему дифференциальных уравнений свободных колебаний системы для вектора \vec{Y} .

4. Составить вековое уравнение для определения параметра собственных частот и форм колебаний.

5. С помощью программы СОБСТВЕК.xls для электронной таблицы EXCEL вычислить собственные частоты колебаний и показать изогнутый вид рамы, соответствующий каждой собственной форме. Проверить ортогональность полученных форм колебаний.

Исходные данные взять из табл. 9.

Таблица 9

Номер		l, м	Номер двуглава
строки	схемы		
1	1	8	40
2	0	6	45
3	2	10	50
4	9	8	55
5	3	6	60
6	8	9	45
7	4	7	40
8	7	7	55
9	5	9	50
0	6	10	60
	a	b	v

Методические указания к решению задачи № 7

1. Число степеней свободы системы с конечным числом сосредоточенных масс — это минимальное число независимых перемещений y_i , определяющих положение системы масс в любой момент времени при колебаниях.

Для систем, показанных на рис. 8, число степеней свободы равно 3. Компонуем из y_i вектор \vec{Y} .

2. Свободные колебания происходят под действием сил инерции. Запишем вектор \vec{Y} как результат изгиба рамы от вектора сил инерции — $M \ddot{\vec{Y}}$, где M — диагональная матрица масс, участвующих в движении

$$M = \begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{bmatrix}.$$

Элементы m_i равны сумме масс, участвующих в движении $y_i(t)$. Применяя принцип независимости действия сил, и введя матрицу единичных перемещений

$$L_\delta = \begin{bmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} & \delta_{13} \\ \delta_{21} & \delta_{22} & \delta_{23} \\ \delta_{31} & \delta_{32} & \delta_{33} \end{bmatrix},$$

получим
$$\vec{Y} = L_\delta (-M \ddot{\vec{Y}}). \quad (1)$$

Эта матричная запись системы трех дифференциальных уравнений свободных колебаний.

3. Матрицу L_δ определяем по формуле Мора [7]:

$$L_\delta = L_m^T \cdot B \cdot L_m,$$

где $L_m = [\vec{M}_1 : \vec{M}_2 : \vec{M}_3]$ — матрица влияния моментов.

Вектор \vec{M}_i — это вектор эпоры моментов в заданной раме от действия $P_i = 1$, приложенной по направлению y_i .

4. Для составления \vec{M}_i нужно подготовить раму к расчету в матричной форме (см. п. 1 методических указаний к задаче № 3).

5. Решаем систему (1) в виде гармонических колебаний

$$\vec{Y} = \vec{V} \sin(\omega t + v), \quad (2)$$

где \vec{V} — вектор амплитуд колебаний масс при частоте ω .

Дифференцируем (2) дважды по

$$\ddot{\vec{Y}} = -\omega^2 \vec{V} \sin(\omega t + v),$$

подставляем в (1) и сокращаем на $\sin(\omega t + v)$

$$\vec{V} = \omega^2 L_8 M \vec{V} . \quad (3)$$

$$\text{Переносим вправо} \quad (\omega^2 L_8 M - E) \vec{V} = 0 \quad (4)$$

Матрица $L_8 M$ при различных значениях m_i несимметричная. Для того чтобы решать проблему собственных значений для симметричной матрицы, сделаем замену

$$\vec{V} = M^{-\frac{1}{2}} \vec{U} . \quad (5)$$

Здесь $M^{-\frac{1}{2}}$ — диагональная матрица с диагональными элементами $\frac{1}{\sqrt{m_i}}$.

Подставляя (5) в (4) и умножая слева на матрицу $M^{\frac{1}{2}}$, получим

$$\left(M^{\frac{1}{2}} L_8 M^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{\omega^2} E \right) \vec{U} = 0 .$$

Обозначим $A = M^{-\frac{1}{2}} L_8 M^{\frac{1}{2}}$ и $\lambda = \frac{1}{\omega^2}$.

Теперь вместо (4) будем иметь

$$|A - \lambda E| \vec{U} = 0 .$$

Это однородная система линейных уравнений для вектора \vec{U} при симметричной матрице A .

Она имеет нетривиальное (ненулевое) решение, если

$$|A - \lambda E| = 0 . \quad (6)$$

После определения λ и \vec{U} нужно перейти к \vec{V} используя (5).

Это уравнение называется *характеристическим* уравнением для определения параметра собственных частот λ . Иногда это уравнение называют *вековым*, так как оно впервые встретилось при определении периода движения планет.

Можно доказать, что для упругой системы, устойчивой в покое, все (в нашем случае 3) собственные значения λ_i действительны и положительны, а собственные векторы соответствующие различным собственным значениям, ортогональны между собой.

Другими словами, если $\lambda_i \neq \lambda_j$, то скалярное произведение $(M \vec{V}_i, \vec{V}_j) = 0$, иначе $m_1 V_{1i} V_{1j} + m_2 V_{2i} V_{2j} + m_3 V_{3i} V_{3j} = 0$.

6. Программа в файле СОБСТВЕК.xls для электронной таблицы EXCEL вычисляет три собственных числа λ_i и три собственных вектора \vec{V}_i по следующему алгоритму:

6.1. Находится наибольшее первое собственное значение λ_1 методом итераций.

Принимаем за начальный вектор \vec{Y} первый столбец матрицы A .

Проводим итерации $\vec{Y}^{(n)} = A \vec{Y}^{(n-1)}$.

При большом n ($n > 10$) $\lambda_1 = \frac{y_i^{(n)}}{y_i^{(n-1)}}$; $\vec{U}_1 = \vec{Y}^{(n)}$.

6.2. Остальные собственные числа λ_2, λ_3 находим методом исчерпывания.

Для аргумента λ_2 проводим преобразование $A_1 = A - \lambda_1 \vec{U}_1 \vec{U}_1^T$.

Для матрицы A_1 методом итерации (п. 6.1) определяем λ_2 и \vec{U}_2 .

Для определения λ_3 проводим преобразование $A_2 = A_1 - \lambda_2 \vec{U}_2 \vec{U}_2^T$.

Для матрицы A_2 методом итерации (п. 6.1) определяем λ_3 и \vec{U}_3 .

7. Геометрические параметры поперечного сечения рамы взять из табл. 10.

Т а б л и ц а 10

Номер двутавра	Масса 1 п.м, кг	Размеры, мм				F_i , см ²	J_{x_3} , см ⁴	W_{x_3} , см ³
		h	b	s	t			
40	57	400	155	8,3	13	72,6	19062	953
45	66,5	450	160	9	14,2	84,7	27696	1231
50	78,5	500	170	10	15,2	100	39727	1589
55	92,6	550	180	11	16,5	118	55962	2035
60	108	600	190	12	17,8	138	76806	2560

Задача № 8

РАСЧЕТ БАЛОЧНОГО РОСТВЕРКА

Для кинематически неопределимой перекрестной балочной системы (рис. 9) требуется:

1. Начертить схему перекрестной балочной системы в соответствии с шифром, расставив необходимое количество шарниров в

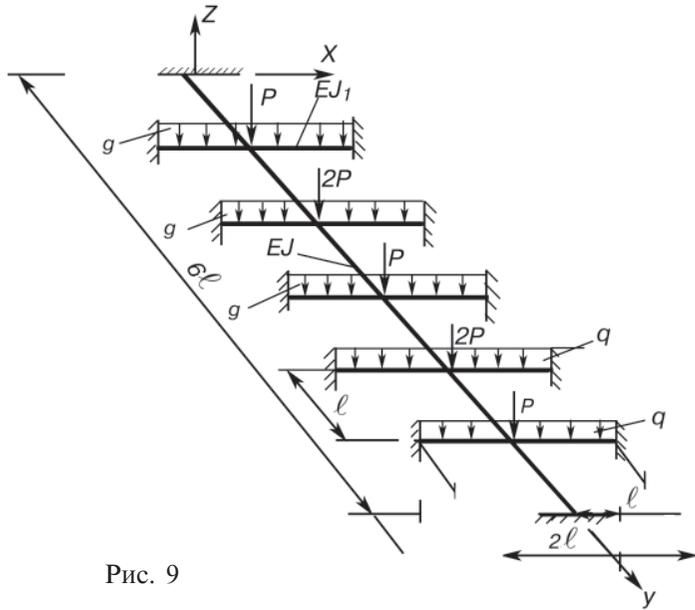


Рис. 9

систему, показанную на рис. 9. При этом следует руководствоваться номерами узлов, показанных для половины системы на рис. 12.

2. Разделить расчетную схему на участки (рис. 11), отметив начало и конец каждого участка сечением с соответствующим номером (рис. 12), установить правило знаков для ординат эпюры изгибающих моментов (рис. 14).

3. Определить число неизвестных узловых вертикальных перемещений и выбрать основную систему метода перемещений, используя в качестве элементов основной системы неразрезные балки, работающие только на изгиб.

4. Построить эпюры изгибающих моментов в основной системе от единичных неизвестных $Z_i = 1$ и от заданных нагрузок $(p + q)$, и записать их в виде матриц-столбцов, принимая в расчет половину системы с учетом симметрии (рис. 10).

5. Подготовить исходную информацию и записать ее на бланке.

6. Ввести исходную информацию в память ПК получить с помощью электронной таблицы EXCEL вектор неизвестных перемещений Z и ординаты эпюры изгибающих моментов в узловых сечениях балок M .

7. С помощью обратной матрицы R^{-1} (матрица перемещений) построить поверхности влияния перемещений узлов z_1, z_2 и z_3 .

8. Построить окончательные эпюры изгибающих моментов M и поперечных сил Q .

9. Выполнить проверку равновесия балочной системы, используя уравнения равновесия статики: $\sum Z = 0; \sum M_k = 0$.

При выборе основной системы рекомендуется принимать неразрезные перекрестные балки с фиктивными вертикальными жесткими опорами в узлах пересечений. Таблицы единичных опорных моментов в неразрезных балках от осадки опор прилагаются. Крутильная жесткость стержней пренебрежимо мала по сравнению с жесткостью на изгиб.

Исходные данные взять из табл.11.

Таблица 11

Номер		Условия опирания балок	l, м	P, кН	q, кН/м	$\frac{EJ_1}{EJ}$
строки	схемы					
1	1	Жесткое опирание	1	10	4	0,5
2	2	Шарнир в узлах 1,4	4	20	6	0,8
3	3	Шарнир в узлах 5,8	6	30	8	1,0
4	4	Шарнир в узлах 9,12	3	40	10	1,2
5	5	Шарнир в узле 18	4	50	12	1,4
6	6	Шарнирное опирание	6	40	14	1,6
7	7	Шарнир в узлах 1,4,9,12	4	30	16	1,0
8	8	Шарнир в узлах 5,8,9,12	2	20	18	2,0
9	9	Шарнир в узлах 1,4,5,8	1	10	20	1,0
0	0	Шарнир в узлах 1,4,18	4	20	22	0,5
	e	e	a	b	v	z

Методические указания к решению задачи № 8 на персональном компьютере

При решении задачи № 8 на ПК пункты 1–5 выполняются студентом до начала лабораторно-экзаменационной сессии. Для записи исходной информации необходимо составить матрицы-

столбцы ординат единичных эпюр моментов $\bar{M}_1, \bar{M}_2, \bar{M}_3$ и грузовой эпюры M_{p+q} моментов, вычислить приведенные податливости каждого участка (см. указания к задаче № 5 и табл. 12, 13).

Вектор грузовых реакций (реактивные усилия $R_{K(p+q)}$) во введенных дополнительных стержнях, препятствующих линейным перемещением узлов определяется с использованием табл. 13.

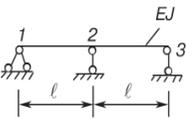
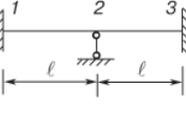
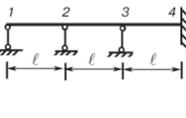
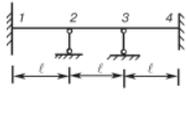
Заданная стержневая система в виде перекрестных балок имеет две оси симметрии, поэтому можно в расчетной схеме принять половину конструкции, полагая при этом жесткость на изгиб центральной поперечной балки $EJ_y = 0,5EJ_1$, а нагруз-

ку $\frac{P}{2}$ и $\frac{q}{2}$ (рис. 10).

Основная система, изображенная на рис. 10, представляет собой балочный ростверк на жестких опорах, состоящий из двух типов балок: неразрезных двухпролетных поперечных балок и трехпролетной балки с защемленными концами. Количество неизвестных вертикальных перемещений равно трем: z_1, z_2 и z_3 . На расчетной схеме нумеруем стержни и сечения, назначаем знаки эпюр изгибающих моментов.

Пользуясь таблицами опорных моментов неразрезных балок от осадки опор, строим эпюры $\bar{M}_1, \bar{M}_2, \bar{M}_3$. В основной системе метода перемещений при заданном нагружении находим усилия M_{p+q} .

Опорные моменты в неразрезных равнопролетных балках при осадке опор

Схема балки	Опорные моменты	При осадке опоры $\Delta_i = 1$			
		1	2	3	4
	$M_2 =$	-1.5	3.0	-1.5	-
	$M_1 =$ $M_2 =$ $M_3 =$	4.5 -3.0 1.5	-6.0 6.0 -6.0	1.5 -3.0 4.5	- - -
	$M_2 =$ $M_3 =$ $M_4 =$	-1.6154 0.4615 -0.2307	3.6923 -2.7692 1.3846	-2.7692 5.0769 -5.5384	0.6923 -2.7692 4.3846
	$M_1 =$ $M_2 =$ $M_3 =$ $M_4 =$	4.4 -2.8 0.8 -0.4	-5.6 5.2 -3.2 1.6	1.6 -3.2 5.2 -5.6	-0.4 0.8 -2.8 4.4

Опорные моменты вычисляются по формуле $M = k \frac{EJ}{l^2} \Delta$,

где k — коэффициенты из таблицы;
 Δ — осадка опоры.

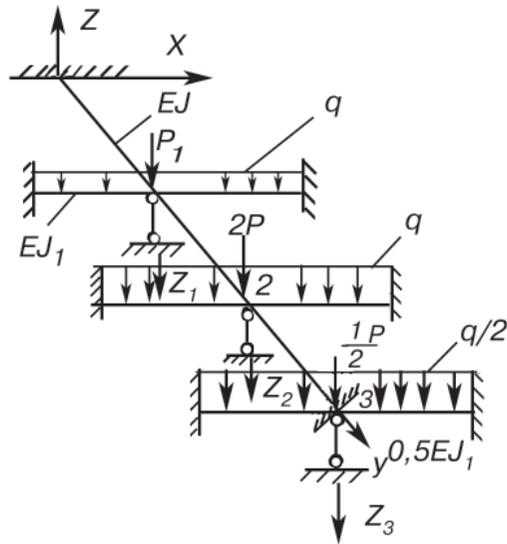


Рис. 10

Таблица 13

Опорные моменты, реакции опор в неразрезных равнопролетных балках от равномерно распределенной нагрузки q

Схема нагрузки	R_1	R_2	R_3	M_1	M_2	M_3
	0,375	1,250	0,375	0	$-\frac{ql^2}{8}$	0
	0,5	1	0,5	$-\frac{ql^2}{12}$	$-\frac{ql^2}{12}$	$-\frac{ql^2}{12}$

Множитель реакций — ql .

Пример решения задачи № 8
(рис. 9)

В нашем примере принято $l=1$ м, в каждом (рис. 10) узле 1,2— $P=10$ кН; в узле 3— $P=5$ кН, $q=0$, $EJ_1=EJ$.

Рассмотрим сначала основные положения метода перемещений, примененного к расчету балочного ростверка. Считаем, что балки опираются друг на друга и связаны между собой в узлах вертикальными стержнями.

Канонические уравнения метода перемещений записываются в виде

$$R\vec{Z} + \vec{R}_p = 0,$$

где R — матрица единичных реакций во введенных связях основной системы от перемещения этих связей на $\vec{Z}_i = 1$:

$\vec{Z} = [Z_1, Z_2, \dots, Z_n]^t$ — матрица (вектор) неизвестных;

$\vec{R}_p = [R_{1p}, R_{2p}, \dots, R_{np}]^t$ — матрица (вектор) свободных членов уравнений метода перемещений.

Разделим расчетную схему на участки и пронумеруем сечения, выберем правило знаков (рис. 11–12).

Алгоритм метода перемещений реализуется в виде [7]:

$$\vec{M} = \vec{M}_{(p+q)} - L_m (L_m^t B L_m)^{-1} \vec{R}_p.$$

Здесь $L_m = [\vec{M}_1, \vec{M}_2, \vec{M}_3]$ — матрица влияния моментов в основной системе метода перемещений.

$$r_{ij} = \sum_s \int_s \frac{\bar{M}_i \bar{M}_j}{EJ} dS; \quad R_{i(p+q)} = - \sum_s \int_s \frac{\bar{M}_i M_{(p+q)}^0}{EJ} dS,$$

где \bar{M}_i, \bar{M}_j — изгибающие моменты в основной системе, построенные от единичного смещения соответствующей связи i или j (рис. 13–14);

$$B = \begin{bmatrix} B_1 & & & \\ & B_2 & & \\ & & \dots & \\ & & & B_i \end{bmatrix},$$

где $B_i = K_i \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ — матрица податливости участка i .

Коэффициенты податливостей участков	
K_1	0,16666
K_2	0,16666
K_3	0,16666
K_4	0,16666
K_5	0,33333
K_6	0,33333
K_7	0,16666
K_8	0,16666
K_9	0,16666

Матрица податливости V формируется автоматически, и ее вводить в память ПК не требуется.

По результатам расчета на экран выдается матрица единичных реакций, обратная матрица, вектор неизвестных, окончательный вектор моментов.

На рис. 16. построена эпюра изгибающих моментов от заданных нагрузок на балочный ростверк.

Матрица единичных реакций		
43,19862	-13,19962	4,79984
-13,19962	43,19923	-10,79959
4,79984	-10,79959	19,19852

Обратная матрица		
0,02562	0,00724	-0,00232
0,00724	0,02898	0,01449
-0,00232	0,01449	0,06082

Окончательный вектор моментов
-1,90222
1,90222
1,90222
-1,90222
-2,60876
2,60876
2,60876
-2,60876
-1,27726
1,27726
1,27726
-1,27726
-0,05426
0,05426
0,05426
0,59785
0,59785
-1,25003

Вектор Z
0,31704
0,43479
0,42575

$\times \frac{1}{EJ}$

Проверка равновесия проводится также, как в задаче № 3 и 5.

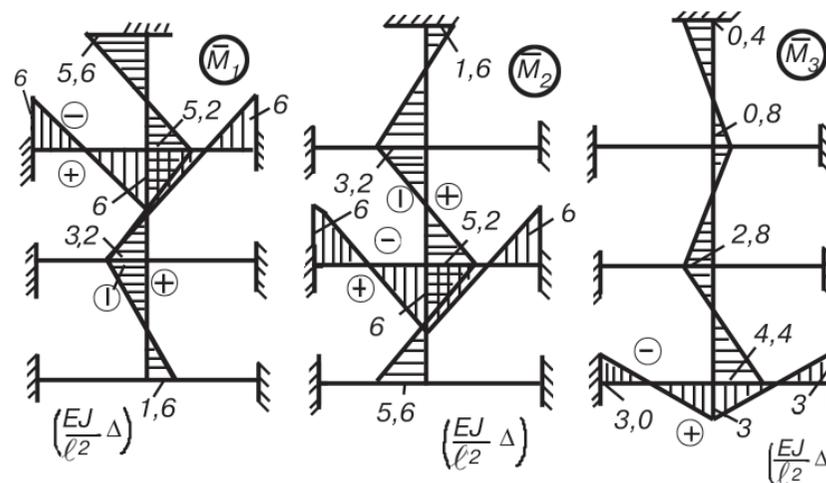


Рис. 15

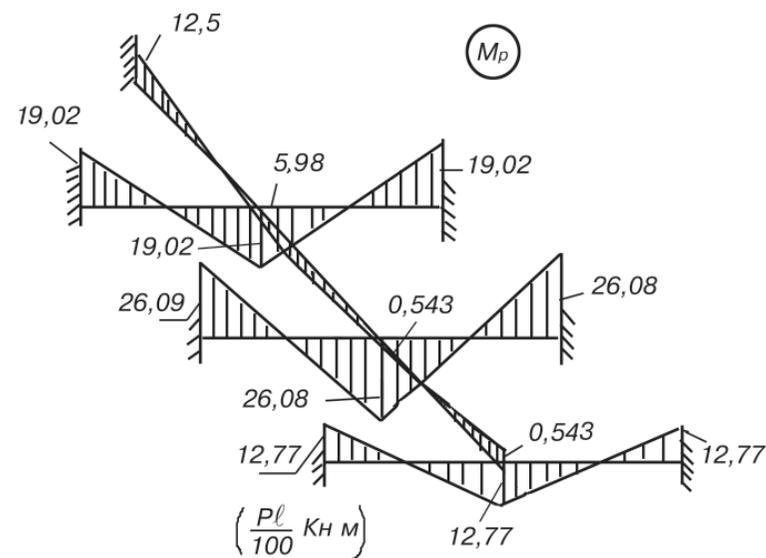


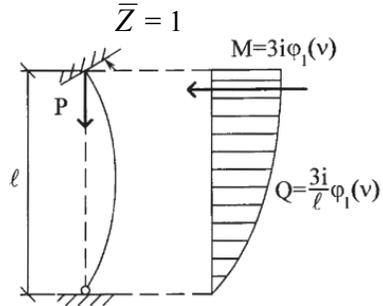
Рис. 16

ПРИЛОЖЕНИЕ 1

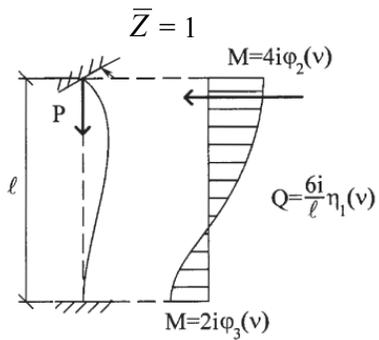
Окончание прил. 1

Вид деформаций и
эпюры моментов

Функции



$$\varphi_1(v) = \frac{v^2}{3 \left(1 - \frac{v}{\operatorname{tg} v} \right)}$$



$$\varphi_2(v) = \frac{1 - \frac{v}{\operatorname{tg} v}}{4 \left(\frac{\operatorname{tg} \frac{v}{2}}{2} - 1 \right)}$$

v	$\varphi_1(v)$	$\varphi_2(v)$	v	$\varphi_1(v)$	$\varphi_2(v)$
0	1,000	1,000	3,2	-0,0635	0,5997
0,1	0,994	0,997	3,3	-0,1847	0,5691
0,2	0,9973	0,9987	3,4	-0,3248	0,5366
0,3	0,9940	0,9970	3,5	-0,4894	0,5021
0,4	0,9893	0,9947	3,6	-0,6862	0,4655
0,5	0,9832	0,9916	3,7	-0,9270	0,4265
0,6	0,9757	0,9879	3,8	-1,2003	0,3850
0,7	0,9669	0,9836	3,9	-1,6269	0,3407
0,8	0,9565	0,9785	4	-2,1726	0,2933
0,9	0,9447	0,9727	4,1	-2,9802	0,2424
1	0,9313	0,9662	4,2	-4,3156	0,1878
1,1	0,9164	0,9590	4,3	-6,9947	0,1287
1,2	0,8998	0,9511	4,4	-15,327	0,0648
1,3	0,8814	0,9424	4,5	+227,93	-0,0048
1,4	0,8613	0,9329	4,6		-0,0809
1,5	0,8393	0,9227	4,7		-0,1646
$\pi/2$	0,8225	0,9149	$3\pi/2$		-0,1755
1,6	0,8152	0,9116	4,8		-0,2572
1,7	0,7891	0,8998	4,9		-0,3607
1,8	0,7606	0,8871	5		-0,4772
1,9	0,7297	0,8735	5,1		-0,6099
2	0,6961	0,8590	5,2		-0,7629
2,1	0,6597	0,8436	5,3		-0,9422
2,2	0,6202	0,8273	5,4		-1,1563
2,3	0,5772	0,8099	5,5		-1,4182
2,4	0,5304	0,7915	5,6		-1,7481
2,5	0,4793	0,7720	5,7		-2,1803
2,6	0,4234	0,7513	5,8		-2,7777
2,7	0,3621	0,7295	5,9		-3,6679
2,8	0,2944	0,7064	6		-5,1594
2,9	0,2195	0,6819	6,1		-8,2336
3	0,1361	0,6560	6,2		-18,591
3,1	0,0424	0,6287	2π		$-\infty$
π	0	0,6168			

СТРОИТЕЛЬНАЯ МЕХАНИКА

Задание на контрольную работу

Редактор *Е.А. Ямщикова*
Компьютерная верстка *Н.Ф. Цыганова*

Тип. зак.	Изд. зак. 256	Тираж 5 000 экз.
Подписано в печать 13.05.04	Гарнитура Times.	Офсет
Усл. печ. л. 2,25		Формат 60×90 ¹ / ₁₆

Издательский центр РГОТУПС,
125993, Москва, Часовая ул., 22/2

Типография РГОТУПС, 125993, Москва, Часовая ул., 22/2