

21/2/10

Одобрено кафедрой
“Сопротивление материалов
и строительная механика”

СТРОИТЕЛЬНАЯ МЕХАНИКА

Решение задач на ЭВМ
Методические указания для студентов III курса
специальностей

- 170900. ПОДЪЕМНО-ТРАНСПОРТНЫЕ, СТРОИТЕЛЬНЫЕ,
ДОРОЖНЫЕ МАШИНЫ И ОБОРУДОВАНИЕ (СМ)
- 290300. ПРОМЫШЛЕННОЕ И ГРАЖДАНСКОЕ
СТРОИТЕЛЬСТВО (ПГС)
- 290900. СТРОИТЕЛЬСТВО ЖЕЛЕЗНЫХ ДОРОГ, ПУТЬ
И ПУТЕВОЕ ХОЗЯЙСТВО (С)
- 291100. МОСТЫ И ТРАНСПОРТНЫЕ ТОННЕЛИ (МТ)



Москва – 2002

Рецензент — д-р техн наук, доц. О.В. МКРТЫЧЕВ

© Российский государственный открытый технический университет путей сообщения, 2002

1. ВВЕДЕНИЕ

1.1. Строительная механика как наука

Строительная механика (СМ) занимается разработкой методов статических и динамических расчетов сооружений на прочность, жесткость и устойчивость.

Развитие строительной механики тесно связано с прогрессом строительной техники.

Основы СМ были созданы в XIX веке в связи с появлением железных дорог, строительством мостов и крупных гидротехнических и промышленных сооружений. Разумеется, в прошлые века человечеством были построены внушительные сооружения, некоторые из них сохранились до наших дней. При этом характерно, что каждое из этих сооружений было уникальным и вопрос об экономии материала, затрачиваемого на его создание, не стоял так остро, как при строительстве, например, множества мостов по железной дороге Москва–Петербург. Изображенные на рис. 1 фасады мостов древности и современности наглядно поясняют сказанное.

Назначение размеров сооружения, отвечающих требованиям прочности и экономичности, приводит к необходимости предварительных расчетов сооружений.

Название “Строительная механика” можно понимать в широком и узком смысле. В широком смысле СМ включает в себя все дисциплины, относящиеся к расчету сооружений, такие как теория сооружений, теория устойчивости, динамика сооружений, теория упругости и пластичности и т.д. В

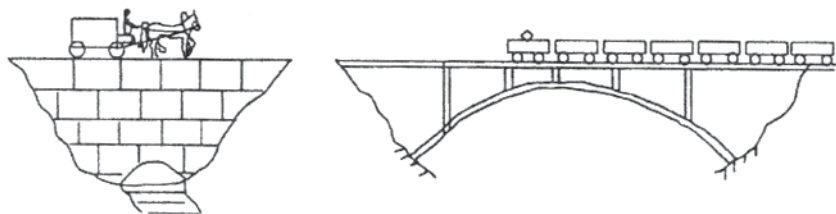


Рис. 1

узком смысле это статика и динамика стержневых систем. В этом издании, кроме пункта 3.2, рассматриваются методы СМ плоских стержневых систем.

Строительная механика широко использует методы теоретической механики, изучающей равновесие и движение твердых тел, но в отличие от последней СМ учитывает деформации сооружений (упругие и упруго-пластические).

В дальнейшем мы будем рассматривать упругие деформации.

1.2. Расчетная схема.

Понятие о стержневой системе

При расчете реального сооружения рассматривают его идеализированную, упрощенную схему, в которой отражают только его основные свойства. Такую схему называют расчетной. В расчетную схему сооружения вводят идеализированные опоры. Переход к расчетной схеме является необходимой идеализацией реального сооружения. По мере накопления новых результатов испытаний сооружений совершается переход от одной расчетной схемы к другой, более точно отражающей реальное поведение конструкции.

В данном издании, кроме пункта 3.2, мы будем рассматривать любое сооружение как плоское, состоящее из стержней соединенных между собой и основанием идеальными связями. Другими словами, в отличие от курса “Сопроотивление материалов”, мы будем рассматривать не один стержень, а ансамбль стержней, образующих расчетную схему. Ансамбль стержней, соединенных между собой идеальными связями и имеющий возможность сопротивляться действию внешней нагрузки, будем называть стержневой системой.

1.3. Операционная система MS DOS.

Порядок работы с программами на ПЭВМ

Операционная система — это мощная программа, осуществляющая взаимодействие между устройством управления (процессором), магнитной памятью и внешними устройствами компьютера. MS DOS наиболее распространенная

система, требующая для своего размещения небольшой объем оперативной памяти по сравнению с современными системами типа WINDOS. Кроме того, при работе с MS DOS студент, как начинающий пользователь ЭВМ, вынужден более тщательно обдумывать свои действия, что с точки зрения обучения имеет свои преимущества.

Студент-пользователь управляет действиями операционной системы с помощью команд MS DOS. Для облегчения ввода команд, при включении персонального компьютера запускается программа NORTON Commander, являющейся посредником между пользователем и операционной системой.

NORTON Commander называют средой (сервисной оболочкой), позволяющей пользователю, не знающему наизусть написание команд MS DOS, свободно управлять действиями операционной системы.

Решение любой задачи на ЭВМ осуществляется с помощью программы, а для работы программы, как правило, нужны исходные данные и обязательно данные результаты. Массив команд, образующих программу, и массивы данных запоминаются на магнитных носителях персональной ЭВМ отдельно друг от друга в виде файлов. Файлом называется область на магнитном носителе (оперативной памяти ЭВМ, магнитном диске, дискете и т.д.), имеющая имя.

Имя файла, как правило, состоит из двух частей, разделенных точкой. *Первая часть* — собственное имя, написанное латинскими символами и цифрами (первой должен быть символ), а *вторая часть* — так называемое расширение или тип файла, содержащее максимум три (символа).

Собственное имя должно быть уникальным, а тип — любым, кроме зарезервированных стандартных. Перечислим некоторые из них: EXE или COM — типы файлов, содержащих программы в машинных кодах, готовые к выполнению; FOR, BAS, PAS, C, CPP — типы файлов, содержащих программы, написанные на алгоритмических языках соответственно Фортране, Бэйсике, Паскале, C и C++. Например, если файл содержит набор символов какого-нибудь текста,

то разумно применить расширение TEX или DOC, а если файл содержит данные — то DAT.

Примеры файлов: stat.exe — программа с именем stat, готовая к выполнению; apr1.dat — файл с исходными данными; arg.res — файл с результатом вычислений.

Для лучшей ориентации в большом количестве файлов, их группируют в так называемые каталоги или директории. Каждый каталог имеет уникальное имя без расширения. Например STRMEN, MOST4 и т.д.

Каталог может содержать несколько файлов и несколько каталогов, подчиненных данному. Таким образом поддерживается иерархия каталогов.

Самый старший на диске каталог называется коренным и обозначается латинской буквой, двоеточием и наклонной чертой сверху вниз (слэш). Например, коренной каталог на диске C обозначается как C:\, а коренной каталог на дискете, читаемой с дисковода A — как A:\. Таким образом, файл stat, находящийся в каталоге STRMEN, который в свою очередь находится в коренном каталоге на диске C:\, можно найти, указав так называемый полный путь C:\STRMEN\stat.exe.

C:\KUZMIN		C:\	
n	Name	n	Name
..		AKOP	NC4
MOST6		APM	NCDTREE
PWTIS		APM.DST	NORTON
X_Z		BM	NWCLIENT
\$point.res	recenu-1.doc	COMPMEH	PKWARE
\$POINT.rtf	RECENбицен1.DOC	D1140901	PM6
point-02.exe	RECENбицен2.DOC	DD	PROF
point-02.for	RECENколесн1.DOC	disk_d	Program Files
recenb2.doc	RECENколесн2.DOC	DOS	Proxy
recenb-1.doc	RECENкоп2.DOC	ELENA	QB1
recend-1.doc	RECENкоп-1.DOC	Foto	qb45
receng2.doc	RECENсок2.DOC	guram	RAB
receng-1.doc	RECENсок-1.DOC	KEYRUS	RECYCLED
RECENkon1.DOC	RECENсок*1.DOC	KUZMIN	unzipped
RECENkon2.DOC	RECENсок*2.DOC	Labs	W95OSR21
RECENlev1.DOC	RECENтреф1.DOC	LCMUNOV	WINDOWS
recens2.doc	RECENтреф2.DOC	MAG	X_Z
recens-1.doc	RECEN*1.PAS.doc	matcad	
	RECEN*2.PAS.txt		
	~\$cend-1.doc		
	~\$CENkon2.DOC		
	~\$cens-1.doc		
55,996 bytes in 7 files		0 bytes in 36 files	
..	< Up > 20.11.99 15:14	~MSETUP.T	<Folder> 29.03.00 11:09
1,596,115 bytes in 51 files		27,593,377 bytes in 46 files	

Рис. 2

При включении компьютера, как правило, на экране появляются две таблицы (рис. 2), называемые окнами Нортонна (левое и правое). В каждом окне изображается список файлов и подчиненных каталогов, принадлежащих каталогу, имя которого указано в заголовке окна. Если в окне изображено содержимое коренного каталога, то заголовок будет C:\ на рис. 2 правое окно, если в окне подчиненный каталог, то в заголовке будет указан путь к нему, например, C:\STRMEN — на рис. 2 левое окно.

Внизу под окнами на экране дисплея изображены функциональные клавиши F# и команды MS DOS, которые будут выполнены при нажатии соответствующих клавиш. Функциональные клавиши находятся в верхнем ряду клавиатуры.

Одно из окон является в определенный момент актуальным, признаком чего является наличие подсвеченной какой либо строки окна, содержащей либо имя файла, либо имя каталога. Например, если курсор (прямоугольник подсветки) находится в правом окне, то, нажимая четыре клавиши со стрелками, можно выделить имя файла apr.dat. Если теперь нажать клавишу F4 — вызов редактора текста EDIT, то на экране появится символьное изображение содержимого этого файла.

C:\KUZMIN\X_Z		C:\X_Z	
n	Name	n	Name
..		..	
apr1.dat		anna.res	
apr2.dat		anna1.res	
setapp.exe		anna2.res	
setapr.exe		anna3.res	
		anna4.res	
		anna5.res	
		apr1.dat	
		apr2.dat	
		shig.res	
		shig2.res	
		shig3.res	
		shig4.res	
		shig5.res	
		shig6.res	
		shig7.res	
42,048 bytes in 2 files		836 03.09.02 18:40	
SETAPR.EXE	19920 01.03.98 00:29	apr1.dat	
42,817 bytes in 4 files		18,903 bytes in 15 files	

Рис. 3

При этом в нижней строке экрана будут отмечены новые команды MS DOS, присвоенные функциональным клавишам F#. Используя клавиши-стрелки и клавишу Delete, можно изменить содержимое файла с данными. Например, если нужно заменить несколько цифр, то стрелками курсор (черточка на экране) подводится к первой цифре, и набираются на клавиатуре нужные символы, а ненужные стираются при нажатии клавиши Delete. После внесения изменений, нужно записать измененный файл на диск, нажав функциональную клавишу F2 — Save (спасать). Далее, нажав F9, можно вывести содержимое файла на принтер, создав так называемую твердую копию этого файла на листе бумаги. Выход из режима EDIT осуществляется нажатием клавиши F10 — Quit. При этом на экране вновь появляется то же состояние окон, которое было перед вызовом режима EDIT (см. рис. 3).

После корректировки исходных данных, можно запустить программу, использующую их, подведя курсор к имени соответствующего файла с расширением EXE и нажав управляющую клавишу ENTER.

Большинство программ в этом пособии записывают числовые результаты в автоматически создаваемые файлы с расширением RES. Для того, чтобы распечатать их содержимое, нужно в окнах Нортонa подвести курсор к имени файла, нажать клавишу F4 — в режиме редактора просмотреть результаты на экране, включить принтер и нажать клавишу F9.

Полученные файлы можно переименовать и записать на диск с именем, соответствующим фамилии или имени студента. Для этого предусмотрена команда MS DOS Copy (клавиша F5) и наличие двух окон Нортонa: если установить подсветку-курсor в одном окне на имени копируемого файла, нажать клавишу F5 и набрать новое имя файла-копии при запросе системы, то файл с новым именем появится в каталоге, содержание которого показано в другом окне.

Следует отметить, что в случае ПЭВМ, работающих под управлением современных операционных систем, таких как WINDOS-95, WINDOS-2000 и других, как правило, есть возможность эмуляции режима MS DOS с оболочками (например, VOLKOV Commander или FAR), поддерживающими принципы NORTON Commander.

2. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ В УПРУГИХ СИСТЕМАХ

2.1. Компоненты перемещения сечения в плоских стержневых системах

В плоских стержневых системах обычно определяют два вида перемещений: изменения координат центров тяжести сечений, называемые линейными перемещениями, и углы поворота плоских сечений, называемые угловыми перемещениями. Зная эти компоненты, можно всегда определить положение любой точки системы после деформации (рис. 4).

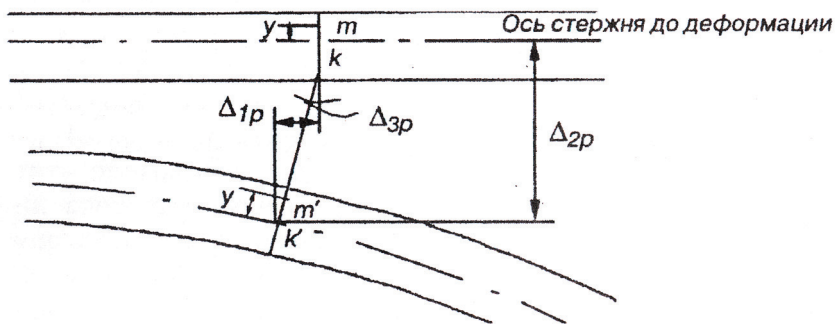


Рис. 4

В строительной механике любые компоненты перемещения принято обозначать буквой дельта с двумя индексами Δ_{ij} , где первый индекс указывает номер направление перемещения, а второй — номер или символ причины, вызывающей это перемещение. На рис. 4 этот индекс указывает на нагрузку, обозначенную символом P , являющуюся причиной рассматриваемой деформации. Линейные компоненты Δ_{1p} и Δ_{2p} позволяют определить положение центра тяжести сечения после деформации, а угол поворот Δ_{3p} определяет положение сечения, на котором находится любая точка m . При этом считается, что продольные волокна при изгибе “друг на друга не давят”, то есть координата Y любой

точки m в поперечном сечении остается неизменной. Следует отметить, что компоненты перемещения предполагаются малыми по сравнению с размерами сооружения. Это справедливо для большого класса строительных и механических конструкций. При взгляде, например, на городской мост в часы пик невозможно увидеть, что он деформирован — это можно обнаружить только с помощью специальных приборов. При проектировании больших мостов максимальная составляющая перемещения по вертикали не должна превышать одной тысячной пролета.

2.2. Действительные и возможные перемещения. Действительная и возможная работа внешних сил

Условие малости перемещений приводит к условию, что внешние силы не меняют своего направления в процессе деформации системы.

В дальнейшем будем рассматривать системы, подчиняющиеся закону Гука. Это значит, что если Δ_{ij} вызвано действием силы P_j , то

$$\Delta_{ij} = kP_j, \quad (2.1)$$

где k — коэффициент пропорциональности.

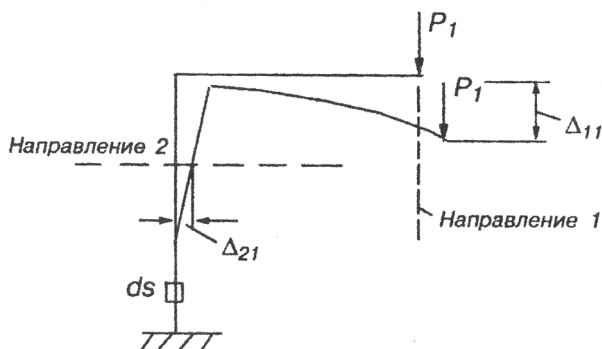


Рис. 5

На схеме, показанной на рис. 5, $\Delta_{11} = k_1 P_1$; $\Delta_{21} = k_2 P_1$, где k_1 и k_2 разные по величине коэффициенты пропорциональности.

Для конкретной силы P различают действительное и возможное перемещения.

Под действительным будем понимать перемещение Δ_{ii} , вызванное силой P_i . Например, на схеме рис. 5 для силы P_1 действительным будет перемещение Δ_{11} .

Подсчитаем работу силы P_1 при деформации рамы (рис. 5). Точка приложения силы P_1 перемещается по направлению этой силы на величину действительного перемещения Δ_{11} .

При этом сила P_1 совершает работу, которую мы назовем действительной и обозначим A_1 . При этом будем предполагать, что так называемое статическое приложение нагрузки, то есть постепенное медленное увеличение нагрузки от 0 до P_1 настолько медленное, что ускорениями точек можно пренебречь.

Промежуточное значение силы обозначим P_1^* , а соответствующее ей перемещение Δ_{11}^* . В процессе увеличения сила P_1^* получит приращение dP_1^* . Подсчитаем элементарную работу силы $P_1^* + dP_1^*$ на соответствующем приращении перемещения $d\Delta_{11}^*$

$$dA_1 = (P_1^* + \beta \cdot dP_1^*) d\Delta_{11}^* = P_1^* d\Delta_{11}^*. \quad (2.2)$$

Здесь β — некоторый коэффициент, учитывающий переменность dP_1^* на интервале приращения перемещения. При этом мы пренебрегаем слагаемым $\beta \cdot dP_1^* d\Delta_{11}^*$, которое является бесконечно малой величиной высшего порядка.

Перемещение прямо пропорционально силе, поэтому $\Delta_{11}^* = k_1 P_1^*$ и $d\Delta_{11}^* = k_1 dP_1^*$.

Подставив последнее выражение в (2.2), вычислим работу на всем пути нагружения, как

$$A_1 = \int dA_1 = \int_0^{P_1} k_1 P_1^* dP_1^* = \frac{k_1 P_1^2}{2} = \frac{P_1 \Delta_{11}}{2}. \quad (2.3)$$

Действительная работа внешней силы P_1 равна половине произведения величины силы на величину действительного

перемещения по направлению силы (теорема Клайперона). В общем случае, при действии нескольких сил P_1, P_2, \dots, P_n , согласно этой теореме, действительную работу внешних сил можно вычислить по формуле

$$A = \frac{1}{2} \sum P_i \Delta_i. \quad (2.4)$$

Вывод этой теоремы приведен в п. 2.7.

Под возможным перемещением будем понимать любое малое перемещение, допускаемое имеющимися связями и независящее от заданной нагрузки. Чаще всего за возможные перемещения можно принять перемещения, вызванные другой системой нагрузок.

Так перемещение Δ_{12} (рис. 6) будет возможным для силы P_1 , показанной на рис. 5.

При этом, если раме, показанной на рис. 5 сообщить возможные перемещения, вызванные силой P_2

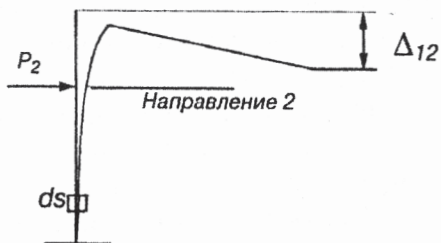


Рис. 6

(рис. 6), то сила P_1 совершит на возможном перемещении Δ_{12} работу, которую будем называть возможной и обозначим

$$A_{12} = P_1 \Delta_{12}. \quad (2.5)$$

В формуле (2.5) отсутствует множитель 0,5, так как Δ_{12} и P_1 не зависят друг от друга, как это имеет место при подсчете действительной работы (2.3).

2.3. Принцип возможных перемещений. Возможная работа внутренних сил

Принцип возможных перемещений состоит в следующем: если некоторая механическая система под действием заданных сил находится в равновесии, то работа сил, приложенных к этой системе, на любых бесконечно малых возможных перемещениях равна нулю. Этот принцип является не-

обходимым и достаточным условием равновесия любой механической системы. Он следует из общего уравнения механики Даламбера-Лагранжа. Доказано, что, применяя принцип возможных перемещений к упругим системам, вместо бесконечно малых возможных перемещений можно рассматривать малые, но конечные перемещения, которые возникают от конкретной нагрузки. Кроме того, возможные перемещения можно отсчитывать не от деформированного состояния, а от начального, ненагруженного.

Выделим двумя сечениями бесконечно малые участки рамы в двух состояниях: в действительном (рис. 5) и в состоянии, вызывающем возможные перемещения (рис. 6). В каждом из этих состояний в сечениях действуют внутренние силовые факторы M , N , Q . В дальнейшем не будем учитывать влияние поперечных сил Q , так как оно обычно мало по сравнению с влиянием M и N . Покажем действие M и N отдельно для двух состояний (рис. 7)

Силовые факторы M и N в действительном состоянии 1 являются внутренними силовыми факторами для всей системы, но для выделенного бесконечно малого элемента они являются внешним моментом и внешней силой. Поэтому мы можем подсчитать элементарную возможную работу этих

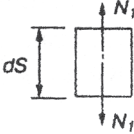
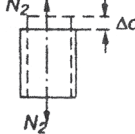
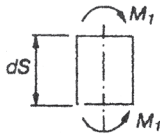
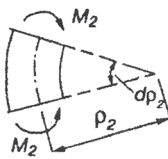
Действительное состояние	Возможное состояние	Возможная работа $dA_{1,2}$
		$N_1 \Delta dS_2 = \frac{N_1 N_2 dS}{EF}$
		$M_1 d\varphi_2 = M_1 \frac{dS}{\rho_2} = \frac{M_1 M_2 dS}{EJ}$

Рис. 7

факторов, используя формулу (2.5), как работу внешних сил на возможных перемещениях, вызванных силами во втором состоянии (рис. 6).

Таким образом,

$$dA_{12} = \frac{N_1 N_2 dS}{EF} + \frac{M_1 M_2 dS}{EJ} . \quad (2.6)$$

Для вычисления элементарной работы dW_{12} внутренних сил в выделенном элементе, воспользуемся принципом возможных перемещений

$$dA_{12} + dW_{12} = 0. \quad (2.7)$$

Отсюда следует важный вывод

$$dW_{12} = -dA_{12} , \quad (2.8)$$

что возможная работа внутренних сил (сил упругости) равна возможной работе внешних сил, но с обратным знаком.

Подставляя (2.6) в (2.8), получим

$$dW_{12} = - \left(\frac{N_1 N_2 dS}{EF} + \frac{M_1 M_2 dS}{EJ} \right). \quad (2.9)$$

Просуммировав возможную работу внутренних сил по всей стержневой системе, будем иметь

$$W_{12} = - \sum \int \frac{N_1 N_2 dS}{EF} - \sum \int \frac{M_1 M_2 dS}{EJ} , \quad (2.10)$$

где интегрирование проводится по каждому стержню, а суммирование — по всем стержням, образующим систему.

Если действительное состояние имеет индекс i , а возможное состояние j , то

$$W_{ij} = - \sum \int \frac{N_i N_j dS}{EF} - \sum \int \frac{M_i M_j dS}{EJ} . \quad (2.11)$$

Формула (2.11) показывает, что за действительное можно принять любое из двух — тогда другое состояние будет считаться возможным для первого.

2.4. Формула Мора для определения перемещений

Применяя принцип возможных перемещений для всей системы, запишем

$$A_{ij} + W_{ij} = 0. \quad (2.12)$$

Отсюда получим формулу для возможной работы внешних сил

$$A_{ij} = -W_{ij} = \sum \int \frac{N_i N_j dS}{EF} + \sum \int \frac{M_i M_j dS}{EJ}. \quad (2.13)$$

Вывод формулы для определения перемещения точки C по направлению i проведем на примере системы, показанной на рис. 8.

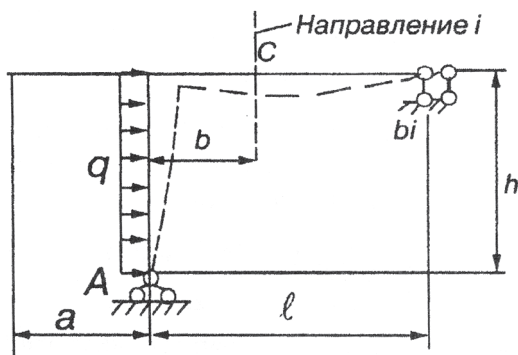


Рис. 8

Причиной перемещения является равномерно распределенная нагрузка q . Обозначим состояние системы показанной на рис. 8, индексом q . Наряду с ним рассмотрим ту же систему, но при действии на нее силы $P_i = 1$ по направлению i (рис. 9).

Обозначим это состояние индексом i . Примем состояние i за действительное, а состояние q за состояние, в котором пере-

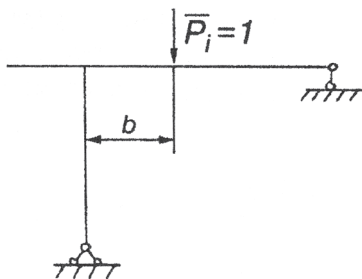


Рис. 9

мещения будут возможными для сил в состоянии i . Воспользуемся (2.13) для подсчета возможной работы сил в состоянии i на возможных перемещениях в состоянии q

$$\overline{P}_i \cdot \Delta_{iq} = \sum \int \frac{\overline{N}_i N_q dS}{EF} + \sum \int \frac{\overline{M}_i M_q dS}{EJ} = \sum_k \frac{\overline{N}_i N_q \ell_k}{EF_k} + \sum \int \frac{\overline{M}_i M_q dS}{EJ}.$$

Здесь учтено, что по длине стержней N — постоянная величина.

Подставив $\overline{P}_i = 1$, получим формулу для определения проекции полного перемещения на направление i

$$\Delta_{iq} = \sum_k \frac{\overline{N}_i N_q \ell_k}{EF_k} + \sum \int \frac{\overline{M}_i M_q dS}{EJ}. \quad (2.14)$$

Формула (2.14) называется формулой Мора — по фамилии ученого, впервые ее получившего. В этой формуле значения внутренних силовых факторов в i -том состоянии обозначены черточками сверху. Это значит, что они возникают в сечениях системы от действия единичного силового фактора, приложенного по направлению искомого перемещения или его проекции. Величины N_q и M_q являются значениями внутренних силовых факторов в сечениях системы в состоянии q . Таким образом, для того, чтобы определить перемещение или проекцию его по какому-нибудь направлению по формуле Мора, нужно сделать следующее:

1. Построить эпюры внутренних силовых факторов от нагрузки, вызывающей перемещение (эп. N_q и эп. M_q).
2. По направлению искомого перемещения приложить единичный силовой фактор (если определяется линейное перемещение, то прикладывается единичная сила, если определяется угол поворота сечения — то сосредоточенный момент) и построить эпюры внутренних силовых факторов (эп. \overline{N}_i и эп. \overline{M}_i).
3. Перемножить соответствующие функции на каждом участке, вычислить интегралы и результаты просуммировать по всем стержням системы в соответствии с (2.14).

Следует отметить, что обе суммы в формуле (2.14) используются при определении перемещений в пологих арках и комбинированных системах, то есть системах, в которых имеются стержни, работающие на изгиб, и стержни, работающие на растяжение или сжатие.

При расчете ферм, ввиду отсутствия изгибающих моментов, для определения перемещений применяется формула

$$\Delta_{iq} = \sum_k \frac{\overline{N}_i N_q \ell_k}{EF_k}, \quad (2.15)$$

где ℓ_k — длина конкретного стержня в ферме;
 F_k — площадь его поперечного сечения.

При расчете рам часто можно пренебречь осевой деформацией и учитывать только изгибную

$$\Delta_{iq} = \sum \int \frac{\overline{M}_i M_q dS}{EJ}. \quad (2.16)$$

2.4.1. Вычисление интегралов Мора. Правило Верещагина. Примеры

Процедуру перемножения функций, например, изгибающих моментов в двух состояниях и последующего интегрирования произведения в пределах одного участка системы можно значительно упростить, если воспользоваться так называемым правилом Верещагина. На рис. 10 показаны фрагменты эпюр моментов в двух состояниях: действительном, в котором действует заданная нагрузка, и единичном (воображаемом). В действительном состоянии эпюра моментов может иметь криволинейное очертание, а в единичном — всегда прямолинейное.

Воспользуемся последним обстоятельством и продолжим прямую эпюры \overline{M}_i до пересечения с осью — отметим точку O_1 . Обозначим расстояние от точки O_1 до текущей ординаты \overline{M}_i через z . Тогда $\overline{M}_i = z \operatorname{tg} \alpha$. Приступим к вычислению определенного интеграла, считая поперечное сечение стержня в пределах одного участка постоянным.

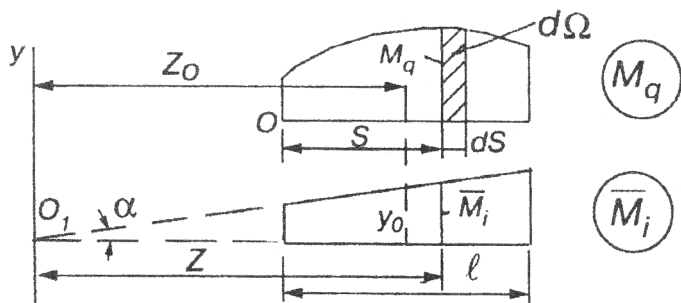


Рис. 10

$$\int_0^{\ell} \frac{\bar{M}_i M_q dS}{EJ} = \frac{1}{EJ} \int_0^{\ell} \bar{M}_i M_q dS = \frac{1}{EJ} \int_{\Omega} z \cdot \operatorname{tg} \alpha \cdot d\Omega = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{EJ} \int_{\Omega} z d\Omega .$$

Здесь введено обозначение $d\Omega = M_q dS$ — элементарная площадь эпюры M_q . Последний интеграл по площади в курсе сопротивления материалов называют статическим моментом площади фигуры (в нашем случае — эпюры моментов M_q) относительно оси y (рис. 10). Там же доказывается, что если известна координата центра тяжести фигуры, то статический момент численно равен произведению площади на эту координату. Таким образом, обозначив z_0 — координату центра тяжести эпюры M_q относительно оси y , а Ω — площадь эпюры M_q , получим

$$\int_0^{\ell} \frac{\bar{M}_i M_q dS}{EJ} = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{EJ} \cdot z_0 \cdot \Omega = \frac{y_0 \cdot \Omega}{EJ} , \quad (2.17)$$

где $y_0 = \operatorname{tg} \alpha \cdot z_0$ — ордината эпюры \bar{M}_i под центром тяжести эпюры M_q .

Окончательно правило Верещагина формулируется следующим образом: для того, чтобы вычислить интеграл от произведения двух эпюр, нужно площадь криволинейной эпюры умножить на ординату прямолинейной под центром тяжести криволинейной и результат разделить на EJ .

Если обе эпюры прямолинейные, то площадь и центр тяжести можно вычислять у любой из них, а ординату — у другой.

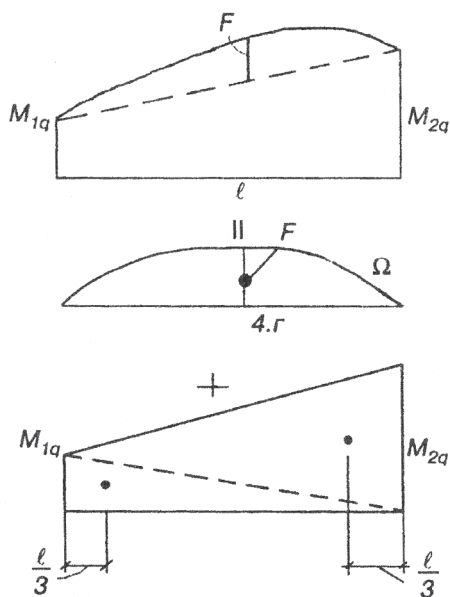
Обычно криволинейность эпюры M_q вызвана действием равномерно распределенной нагрузки. При этом всегда такую эпюру можно рассматривать как сумму прямолинейной эпюры, возникающей от концевых моментов, и параболического сегмента, имеющего вид эпюры моментов в однопролетной шарнирно опертой балке от равномерно распределенной нагрузки (рис. 11). Отклонение криволинейной эпюры в середине участка от линии, соединяющей крайние ординаты M_{1q} и M_{2q} , называют стрелкой и обозначают f . От действия равномерно распределенной нагрузки q всегда

$$f = \frac{q\ell^2}{8}, \quad (2.18)$$

а площадь параболического сегмента

$$\Omega = \frac{2}{3} f\ell \quad (2.19)$$

с центром тяжести посередине участка.



Прямолинейную часть эпюры можно, в свою очередь, рассматривать как сумму двух треугольных эпюр с центрами тяжести в соответствующей трети участка.

Рис. 11

ПРИМЕР № 1

Для заданной рамы определить линейные и угловые перемещения по направлению 1, 2 и 3 (рис. 12).

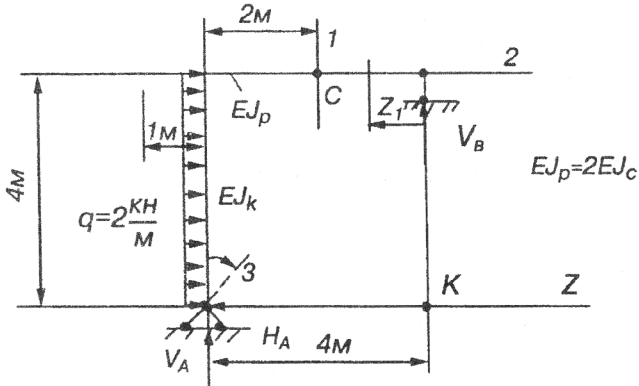


Рис. 12

Для вычисления всех перемещений нужно построить эпюру моментов от заданной нагрузки. Начнем с определения опорных реакций. Для определения реакции составим уравнение равновесия

$$\sum m_A = 0;$$

$$q \cdot 4 \cdot 2 - V_B \cdot 4 = 0; \quad V_B = 2q = 4 \text{ кН.}$$

Для определения вертикальной составляющей реакции в точке А составим уравнение равновесия

$$\sum m_K = 0;$$

$$V_A \cdot 4 + q \cdot 4 \cdot 2 = 0; \quad V_A = -2q = -4 \text{ кН.}$$

Для определения горизонтальной составляющей

$$\sum Z = 0; \quad q \cdot 4 - H_A = 0; \quad H_A = 4q = 8 \text{ кН.}$$

$$\text{Проверка } \sum Y = 0; \quad V_A + V_B = -4 + 4 = 0.$$

Реакции найдены верно.

Проводим разрез на ригеле и рассматриваем правую оставшуюся часть (рис.13).

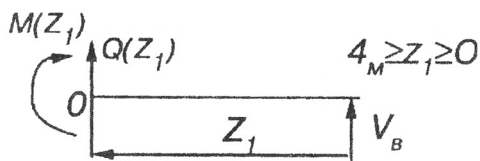


Рис. 13

Составим уравнение равновесия

$$\sum m_0 = 0; \quad M(z_1) - V_B z_1 = 0; \quad M(z_1) = V_B z_1 = 4z_1.$$

Получили положительный результат, значит — момент в сечении действует именно так, как показан на рис. 13, то есть вызывает растягивающие напряжения в нижних волокнах стержня. Следовательно, ординаты эпюры откладываем вниз — в сторону растянутых волокон. Эпюра имеет треугольный вид (рис. 14).

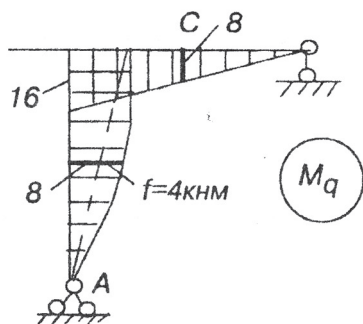


Рис. 14

Проведя разрез на левой части ригеля (консоли), убеждаемся, что там $M_q = 0$.

При построении эпюры M_q на стойке можно провести разрез и записать аналитическое выражение ординат, но можно воспользоваться принципом независимости действия сил и рассуждать следующим образом. Изгибающий момент в любом сечении стойки возникает

от действия момента в верхнем сечении и равномерно распределенной нагрузки по всей длине. Узел примыкания ригеля к стойке должен быть в равновесии, поэтому, зная изгибающий момент в ригеле, вызывающий растяжение нижних волокон 16 кНм, мы можем уверенно сказать, что в верхнем сечении стойки изгибающий момент должен действовать так, чтобы вызывать растяжение правых волокон

и быть равным 16 кНм. В сечении у опоры A момент должен быть равен 0 — получается треугольная эпюра, но действие распределенной нагрузки приводит к необходимости добавления параболического сегмента со стрелкой

$$f = \frac{qh^2}{8} = \frac{2 \cdot 4^2}{8} = 4 \text{ кН},$$

направленной в сторону действия нагрузки q (рис. 14).

При таком способе построения не определяется точка экстремума изгибающего момента, но для вычисления перемещения она не нужна. В нашем случае точка экстремума $\frac{dM_q}{dz} = 0$ на стойке будет в верхнем сечении, где $Q = 0$.

Для определения проекции перемещения точки C на направление 1, приложим по этому направлению единичную силу $P_1 = 1$ (рис. 15) и построим эпюру M_1 .

Применим формулу Мора в виде (2.16)

$$\Delta_{1q} = \sum \int \frac{\overline{M}_1 M_q dS}{EJ} = \frac{1}{EJ_p} \left[\frac{16 \cdot 2}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot 1 + \frac{8 \cdot 2}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 \cdot 2 \right] = \frac{16}{EJ_p}.$$

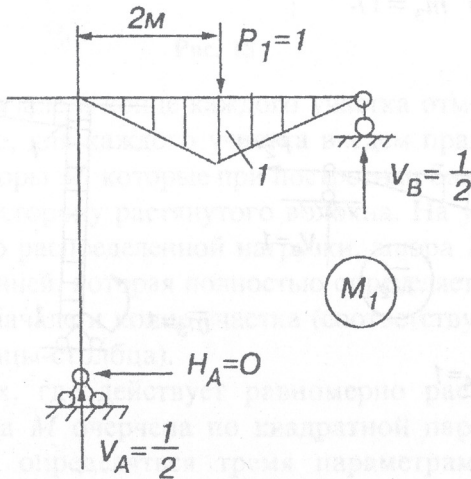


Рис. 15

Положительный результат означает, что проекция перемещения точки C на направление 1 , при действии нагрузки q , направлена вниз.

Определим линейное перемещение точки B по направлению 2 . Для этого приложим в точке B единичную силу $\overline{P}_2 = 1$ по этому направлению и построим эпюру \overline{M}_2 (рис. 16). Применим формулу Мора в виде (2.16) и способ Верещагина

$$\Delta_{2q} = \sum \int \frac{\overline{M}_2 M_q dS}{EJ} = \frac{1}{EJ_c} \left[\frac{16 \cdot 4}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{2} + \frac{16 \cdot 4}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 4 + \frac{2}{3} \cdot 4 \cdot 4 \cdot 2 \right] = \frac{448}{3EJ_c} \text{ м.}$$

Точка перемещается вправо (по направлению \overline{P}_2). Определим угол поворота сечения A по направлению 3 .

Для этого приложим в сечении A сосредоточенный момент $\overline{m}_3 = 1$ и построим эпюру \overline{M}_3 (рис. 17). Далее применим формулу Мора и правило Верещагина. В таких случаях говорят “перемножим эпюры \overline{M}_3 и M_q ”.

$$\Delta_{3q} = \sum \int \frac{\overline{M}_3 M_q dS}{EJ} = \frac{1}{EJ_c} \left[\frac{16 \cdot 4}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} + \left(\frac{16 \cdot 4}{2} + \frac{2}{3} \cdot 4 \cdot 4 \right) \cdot 1 \right] = \frac{160}{3EJ_c} \text{ рад.}$$

Сечение A поворачивается по часовой стрелке (по направлению $\overline{m}_3 = 1$).

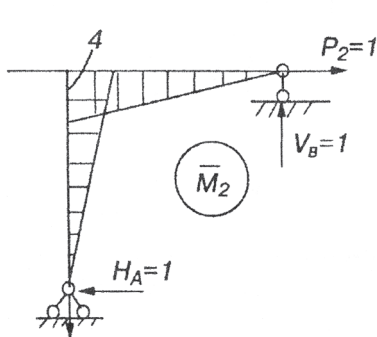


Рис. 16

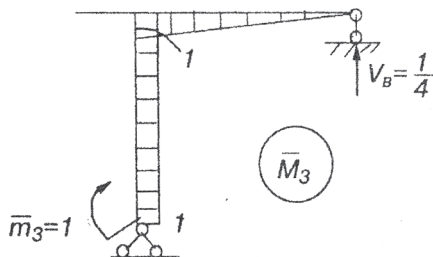


Рис. 17

2.5. Матричный алгоритм определения перемещений

2.5.1. Эпюры внутренних усилий в матричной записи. Матрица влияния

Рассмотрим раму, показанную на рис. 18, а и построим для нее эпюру изгибающих моментов. При этом наряду с эпюрой M будем рассматривать матрицу-столбец, элементы которой численно равны ординатам эпюры M в начале и конце участков, на которые предварительно разделим данную стержневую систему (рис. 18, б).

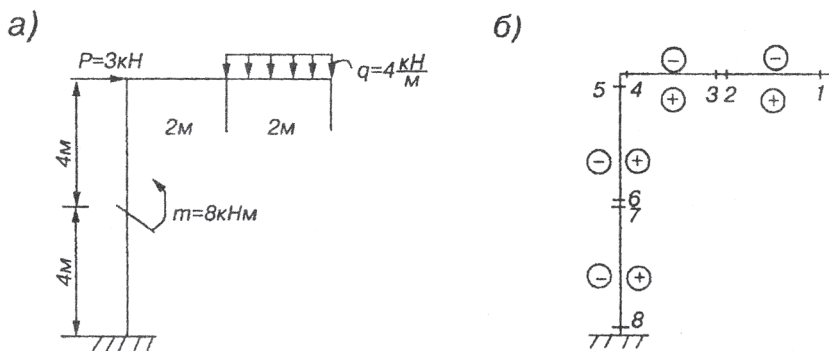


Рис. 18

Сечения в начале и конце каждого участка отметим цифрами. Кроме того, для каждого участка введем правило знаков для ординат эпюры M , которые при построении были отложены от оси рамы в сторону растянутого волокна. На участках, где нет равномерно распределенной нагрузки, эпюра M очерчивается прямой линией, которая полностью определяется значениями ординат в начале и конце участка (соответствующими элементами матрицы-столбца).

На участках, где действует равномерно распределенная нагрузка эпюра M очерчена по квадратной параболе и поэтому должна определяться тремя параметрами. Третьим параметром будет служить стрелка f , определение которой

дано в примере п. 2.4.1. На рис. 19 показан фрагмент эпюры M на участке, где действует равномерно распределенная нагрузка и формула для стрелки f .

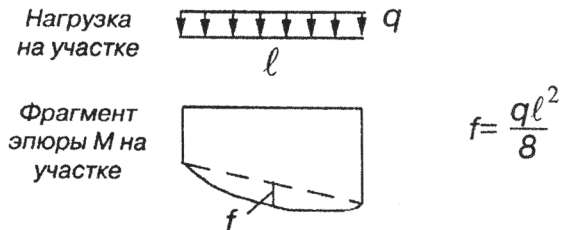


Рис. 19

Таким образом, структура матрицы-столбца эпюры M (чаще мы будем говорить вектора эпюры моментов \vec{M}) имеет вид

$$\vec{M} = [m_1 \quad f \quad m_2 \quad m_3 \quad m_4 \quad \dots \quad m_8] \quad (2.20)$$

Вспользуемся принципом независимости действия сил: будем строить эпюры моментов от каждого вида нагрузок равных 1 и записывать эти эпюры в виде векторов (рис. 20). Все три вектора составим вместе, образуя так называемую матрицу влияния моментов (2.21).

$$L_m = \left[\begin{array}{ccc} \vec{M}_q^- & \vec{M}_P^- & \vec{M}_m^- \end{array} \right] \quad (2.21)$$

$$L_m = \left[\begin{array}{ccc} 0 & 0 & 0 \\ 0.5 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \\ -6 & 0 & 0 \\ -6 & 0 & 0 \\ -6 & -4 & 0 \\ -6 & -4 & 1 \\ -6 & -8 & 1 \end{array} \right]$$

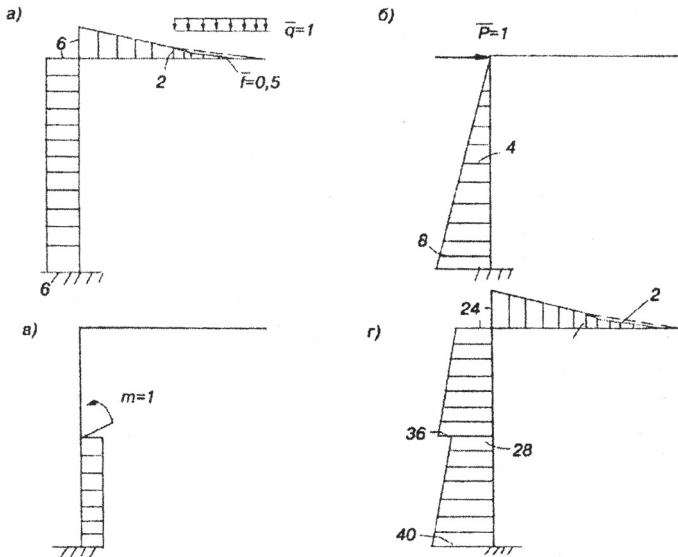


Рис. 20

Образует матрицу-столбец (вектор) нагрузки $\vec{P} = [4 \ 3 \ 8]$.

Вектор окончательной эпюры моментов (2.20) определяется по формуле

$$\vec{M} = L_m \vec{P} \quad (2.22)$$

$$\vec{M} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0.5 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \\ -6 & 0 & 0 \\ -6 & 0 & 0 \\ -6 & -4 & 0 \\ -6 & -4 & 1 \\ -6 & -8 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ -8 \\ -8 \\ -24 \\ -24 \\ -36 \\ -28 \\ -40 \end{bmatrix}$$

Построим эпюру M (рис. 20, з), откладывая ординаты, равные по величине элементам \vec{M} перпендикулярно оси участка в соответствии с выбранным правилом знаков для этого участка.

Матрицы влияния широко применяются в строительной механике. Рассмотрим структуру матриц влияния моментов в общем виде. Для этого элементы матрицы обозначим m_{ij} , где i — номер сечения, а j — индекс единичной нагрузки, вызывающей изгиб. Элементы строки с номером i представляют собой значения момента в сечении i от разных нагрузок, равных 1. При умножении этой строки на вектор нагрузки автоматически (в соответствии с правилом умножения матриц) происходит умножение значений ординат эпюр от единичных нагрузок (единичных эпюр) на действительное значение нагрузок и их сложение. Таким образом, формула (2.22) лаконично выражает целый процесс умножения единичных эпюр на каждую из нагрузок и их сложение.

Применение формулы (2.22) целесообразно в случае, если одну и ту же систему нужно рассчитывать на разные сочетания нагрузок. При этом меняется только вектор нагрузки, а матрица во всех расчетах одна и та же. Например, построим эпюру M от другой системы нагрузок (рис. 21). При этом вектор нагрузки примет вид $\vec{P}' = [-2 \quad -2 \quad -20]$ применяя формулу (2.22), получим

$$\vec{M} = L_m \times \vec{P}' = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 4 \\ 4 \\ 12 \\ 12 \\ 20 \\ 0 \\ 8 \end{bmatrix}$$

Понятие матрицы влияния моментов приобретает глубокий смысл при построении линий влияния в балках. Проведем расчет в матричной форме (рис. 22).

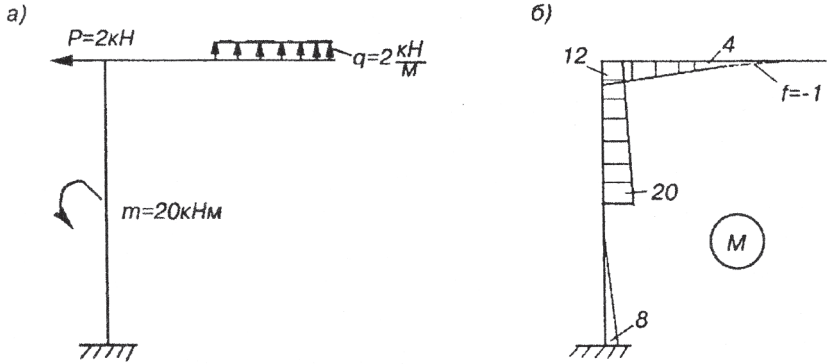


Рис. 21

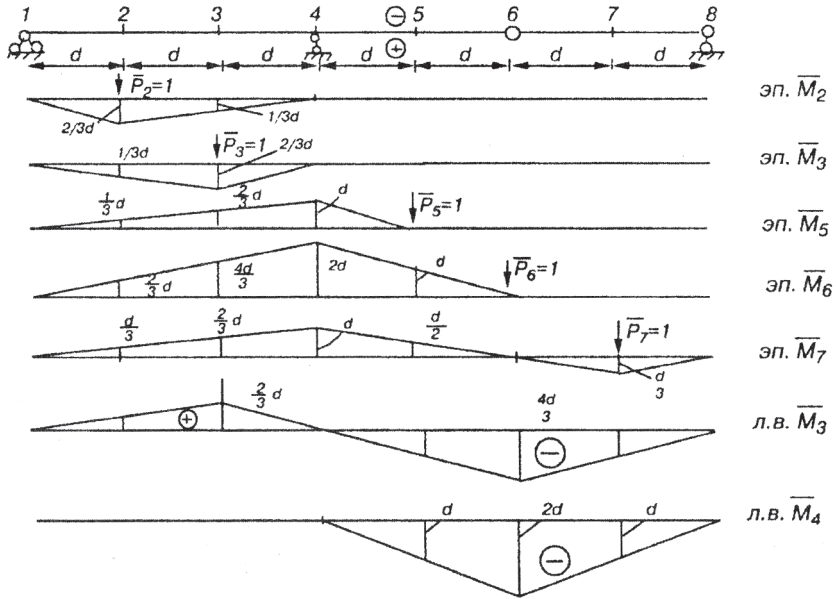


Рис. 22

Разделим балку на 7 участков длиной d и пронумеруем сечения на границах участков. В отличие от схемы на рис. 18, б начало следующего и конец предыдущего участка отметим одним номером. Это можно сделать, если нагрузка не содержит сосредоточенных моментов, приводящих к скачкам в эпюре моментов. Далее выберем общее правило знаков для ординат M для всех участков балки (рис. 22). Будем последовательно устанавливать $\bar{P} = 1$ в узловые точки, записывать векторы моментов и составлять их рядом, образуя матрицу влияния моментов

$$L_m = \left[\begin{array}{cccccc} \vec{M}_1 & \vec{M}_2 & \dots & \vec{M}_8 \end{array} \right] = \frac{d}{3} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & -1 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & -2 & -4 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 & -6 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3 & -1.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} .$$

В общем виде матрица влияния моментов имеет вид

$$L_m = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} & \dots & m_{18} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} & \dots & m_{28} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} & \dots & m_{38} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ m_{81} & m_{82} & m_{83} & \dots & m_{88} \end{bmatrix} .$$

Если рассматривать элементы m_{ij} матрицы L_m по столбцу с номером j , то это будут ординаты эпюры моментов от силы $P_j = 1$, а если рассматривать элементы m_{ij} матрицы L_m по строке с номером i , то это будут ординаты линии влияния момента в сечении с номером i . Это хорошо видно по индексам — по строке меняется второй индекс, следовательно, $\bar{P}_j = 1$ устанавливается в разных узлах, а момент опреде-

ляется только в одном сечении i , а это и есть по определению ординаты линии влияния момента в этом сечении.

Таким образом, если матрица L_m построена по эпюрам изгибающих моментов, то для того, чтобы построить линию влияния, например, изгибающего момента в сечении 3, нужно отложить ординаты, равные элементам строки с номером 3 матрицы L_m и соединить их прямыми линиями (рис. 22). Таким же способом построим линию влияния в сечении 4.

2.5.2. Матричная формула для определения перемещений

При проведении расчетов в матричной форме эпюры внутренних силовых факторов представляются в виде матриц-столбцов или векторов. При этом в формуле Мора для перемещений тоже должны учитываться соответствующие векторы. Вычислим интеграл от перемножения двух эпюр на одном участке длиной d (рис. 23), воспользовавшись правилом Верещагина. Пусть одна из эпюр очерчена по параболе (фрагмент эпюры от нагрузки), а другая по прямой линии (фрагмент эпюры соответственно M_q и M_i).

Запишем эпюры M_q и \bar{M}_i в виде матриц-столбцов

$$\vec{M}_q = \begin{bmatrix} M_{1q} \\ f \\ M_{2q} \end{bmatrix}; \quad (2.23)$$

$$\vec{M}_i = \begin{bmatrix} M_{1i} \\ M_{2i} \end{bmatrix}. \quad (2.24)$$

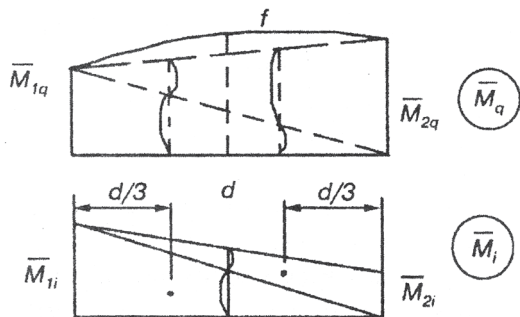


Рис. 23

Разделим эпюры на треугольные части и параболический сегмент, для которых известны формулы вычисления площадей и координат центров тяжести.

$$\int_0^d \frac{\overline{M}_i M_q dS}{EJ} = \frac{1}{EJ} \left[\overline{M}_{1i} d \left(\frac{2}{3} M_{1q} + \frac{1}{3} M_{2q} \right) + \frac{2}{3} f d \left(\frac{\overline{M}_{1i} + \overline{M}_{2i}}{2} \right) + \overline{M}_{2i} d \left(\frac{1}{3} M_{1q} + \frac{2}{3} M_{2q} \right) \right] =$$

$$= \frac{d}{6EJ} \left[\overline{M}_{1i} (2 \cdot M_{1q} + 2 \cdot f + 1 \cdot M_{2q}) + \overline{M}_{2i} (1 \cdot M_{1q} + 2 \cdot f + 2 \cdot M_{2q}) \right].$$

Выражение в квадратных скобках представляет собой сумму произведений, а ее всегда можно представить как произведение матрицы-строки на матрицу-столбец

$$\int_0^d \frac{\overline{M}_i M_q dS}{EJ} = \frac{d}{6EJ} \left[\overline{M}_{1i} \quad \overline{M}_{2i} \right] \times \begin{bmatrix} 2 \cdot M_{1q} + 2 \cdot f + 1 \cdot M_{2q} \\ 1 \cdot M_{1q} + 2 \cdot f + 2 \cdot M_{2q} \end{bmatrix}.$$

Первая матрица-строка представляет собой транспонированный вектор (2.24), а каждый элемент второй матрицы-столбца можно представить как сумму произведений — в данном случае двух разных сток на один и тот же столбец (2.23).

Объединив указанные строки в матрицу

$$B_d = \frac{d}{6EJ} \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}, \quad (2.25)$$

получим

$$\int_0^d \frac{\overline{M}_i M_q dS}{EJ} = \vec{M}_i \cdot B_d \cdot \vec{M}_q. \quad (2.26)$$

Это выражение в дальнейшем будем называть трехчленной матричной формулой. Матрица (2.25) называется матрицей податливости данного участка. Если на участке отсутствует равномерно распределенная нагрузка, то $f = 0$ и средний столбец не используется

$$B_d = \frac{d}{6EJ} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}. \quad (2.27)$$

При определении перемещений по формуле Мора с учетом деформации всех участков системы получается тоже трехчлен-

ная матричная формула, структура которой аналогична (2.26), но используются векторы, учитывающие внутренние силовые факторы для всех отмеченных сечений системы

$$\Delta_{ij} = \vec{M}_i^t \cdot B \cdot \vec{M}_j, \quad (2.28)$$

где \vec{M}_i — полный вектор эпюры моментов от единичного силового фактора;

\vec{M}_j — полный вектор от нагрузки, вызывающей перемещение;

B — матрица податливости всей системы, которая компонуется из подматриц податливостей каждого участка типа (2.25) или (2.27) по следующей схеме

$$B = \begin{bmatrix} B_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & B_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & B_3 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & B_r \end{bmatrix}, \quad (2.29)$$

где r — число участков системы.

ПРИМЕР № 2

Для рамы, показанной на рис. 24 определить вертикальное перемещение точки C , учитывая только изгибные деформации.

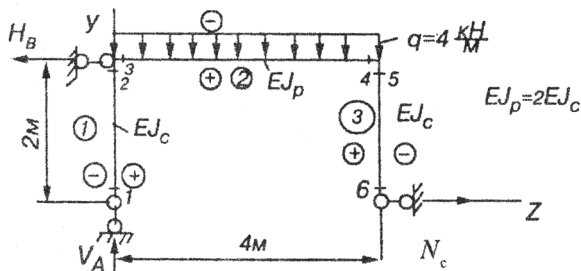


Рис. 24

Прежде всего, проводим подготовку схемы рамы к расчету с помощью матриц. Для этого нумеруем участки, и сечениям, на границах каждого участка, присваиваем индивидуальный номер. Затем устанавливаем для каждого участка свое правило знаков для ординат эпюр моментов, которые будем, как всегда, откладывать в сторону растянутого волокна.

Стоим эпюру M_q от заданной нагрузки.

Определяем опорные реакции.

$$\sum Y = 0; \quad V_A - q \cdot 4 = 0; \quad V_A = 4q = 16 \text{ кН.}$$

$$\sum m_A = 0; \quad q \cdot 4 \cdot 2 - H_B \cdot 2 = 0; \quad H_B = 4q = 16 \text{ кН.}$$

$$\sum m_2 = 0; \quad H_C \cdot 2 - q \cdot 4 \cdot 2 = 0; \quad H_C = 4q = 16 \text{ кН.}$$

Проверка:

$$\sum Z = 0; \quad H_C - H_B = 0 \quad 16 - 16 = 0.$$

Реакции найдены верно.

Проведя разрез на участке 1-2 (рис. 24) и рассматривая равновесие нижней части стойки, видим, что реакция V_A проходит через центр тяжести сечения, поэтому изгибающий момент на этом участке отсутствует. На участке 5-6 момент возникает от реакции H_C — эпюра треугольная. На участке 3-4 применяем способ, указанный в предыдущем примере. При этом стрелка равна

$$f = \frac{ql^2}{8} = \frac{4 \cdot 16}{8} = 8 \text{ кН.}$$

Эпюра M_q показана на рис. 25.

Записываем ординаты эпюры M_q в матрицу-столбец, для удобства показанный транспонированным

$$\vec{M}_q = [0 \quad 0 \quad 0 \quad 8 \quad 32 \quad 32 \quad 0].$$

Рассматриваем ту же раму под действием $\bar{P}_1 = 1$, приложенной в сечении 6 по направлению искомого перемещения (рис. 26).

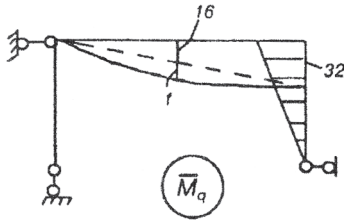


Рис. 25

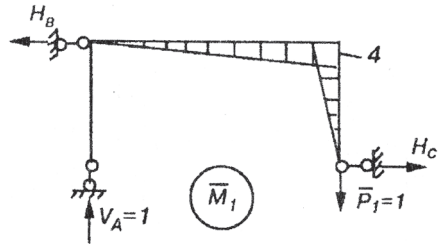


Рис. 26

Определяем реакцию:

$$\sum m_B = 0; \quad \bar{P}_1 \cdot 4 - H_C^2 = 0; \quad H_C = 2 \cdot \bar{P}_1 = 2.$$

Далее методом сечений определяем ординаты эпюры \bar{M}_1 (рис. 26). Записываем ординаты эпюры \bar{M}_1 в матрицу-столбец

$$\vec{M}_1 = [0 \ 0 \ 0 \ 4 \ 4 \ 0].$$

Составляем матрицы податливости каждого участка

$$B_1 = \frac{2}{6EJ_c} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}; \quad B_2 = \frac{4}{6EJ_p} \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} = \frac{2}{6EJ_c} \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}; \quad B_3 = B_1.$$

Составляем матрицу податливости всей системы по схеме (2.29)

$$B = \frac{1}{3EJ_c} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Определяем перемещение по формуле (2.28)

$$\Delta_{1q} = \vec{M}_1 \cdot B \cdot \vec{M}_q = \frac{1}{3EJ_c} [0 \ 0 \ 0 \ 4 \ 4 \ 0] \times$$

$$\times \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 8 \\ 32 \\ 32 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{3EJ_c} [0 \ 0 \ 4 \ 8 \ 8 \ 8 \ 4] \times$$

$$\times \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 8 \\ 32 \\ 32 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{3EJ_c} (64 + 256 + 256) = \frac{576}{3EJ_c} = \frac{192}{EJ_c} \text{ м.}$$

Точка C перемещается вниз (по направлению $\overline{P_1} = 1$).

2.5.3. Программа SETPEREM.EXE для определения перемещений. Примеры

С помощью формул (2.16) и (2.28) можно вычислить перемещение, учитывая только изгибные деформации. Формулу (2.15) тоже можно представить как перемножение матриц

$$\Delta_{iq} = \vec{N}_i \cdot \vec{B} \cdot \vec{N}_q, \quad (2.30)$$

\vec{N}_i — вектор эпюры нормальных сил от единичного силового фактора, приложенного по направлению искомого перемещения;

\vec{N}_q — вектор эпюры нормальных сил от нагрузки;

B — матрица податливости системы при учете осевых деформаций, представляющая собой диагональную матрицу.

В каждой из матриц, являющейся сомножителем, конкретный участок представлен одним числовым элементом — в матрицах N это ординаты эпюр N на этом участке, а в матрице B — это податливость участка при растяжении, стоящая на главной диагонали и определяемая формулой

$$B_d = \frac{d_k}{EA_k}, \quad (2.31)$$

где d_k — длина k -того участка;
 A_k — площадь поперечного сечения участка.

Для комбинированных систем нужно учитывать два вида деформаций, поэтому формулы (2.28) и (2.30) можно обобщить

$$\Delta_{iq} = \vec{S}_i \cdot B \cdot \vec{S}_q, \quad (2.32)$$

где \vec{S}_i — вектор внутренних усилий в расчетных сечениях системы от единичного силового фактора,
 \vec{S}_q — вектор внутренних усилий от нагрузки, являющейся причиной перемещения.

Оба этих вектора имеют структуру

$$\vec{S}_j = [m_{1j} \quad m_{2j} \quad \dots \quad m_{2C-1,j} \quad m_{2C,j} \quad n_{2C+1,j} \quad n_{2C+2,j} \quad \dots \quad n_{2C+D,j}], \quad (2.33)$$

где C — количество участков, имеющих по два расчетных сечения;
 D — количество участков, имеющих по одному расчетному сечению.

Следует заметить, что одно расчетное сечение может иметь не только участок, работающий на растяжение-сжатие, но и участок работающий на изгиб, если заранее известно, что в одном из крайних сечений момент всегда равен 0, и имеет смысл учитывать только ненулевую ординату эпюры моментов. При этом матрица податливости состоит из одного числа

$$B_d = \frac{d}{3EJ}. \quad (2.34)$$

Процедура вычисления перемещения по формуле (2.32) составила алгоритм программы, находящейся в файле

SETPEREM.EXE и написанной на языке программирования Turbo Pascal 6.0. Для работы программы должны быть предварительно заполнены файлы APR1.DAT и APR2.DAT, находящиеся в каталоге C:\PEREM.

Порядок работы с файлами описан в п. 1.3.

В файле APR1.DAT в режиме EDIT в первой строке записывается имя или фамилия студента латинскими буквами, а в последующих строках — транспонированные векторы эпюр внутренних усилий от единичных силовых факторов, приложенных по направлениям искомым перемещений. Для того, чтобы получить матрицу-столбец, элементы которого представляют перемещения различных сечений по заданным θ направлениям (вектор перемещений), нужно в формуле (2.32) перед матрицей B поставить транспонированную матрицу влияния

$$L_S = \begin{bmatrix} \vec{S}_1 & \vec{S}_2 & \cdots & \vec{S}_\theta \end{bmatrix}, \quad (2.35)$$

где \vec{S}_i — векторы эпюр внутренних усилий.

Таким образом, в программе предполагается вычисление вектора перемещений по формуле

$$\vec{\Delta} = L_S' \cdot B \cdot \vec{S}_q. \quad (2.36)$$

В файле APR2.DAT в режиме EDIT записывается по группам следующая информация:

1) массив коэффициентов i_k податливостей участков, то есть массив числовых множителей перед матрицами податливости участков в формулах (2.25), (2.27), (2.31), (2.34).

Если участок работает на изгиб с двумя расчетными сечениями или с одним, то $i_k = \frac{\ell_k}{6EJ_k}$. Если участок работает на растяжение или сжатие, то $i_k = \frac{\ell_k}{2EA_k}$;

2) массив чисел, каждое из которых соответствует числу расчетных сечений на участке системы (массив состоящий из 2 и 1);

3) массив номеров участков, где действует равномерно распределенная нагрузка;

4) массив значений стрелок эпюр f от действия равномерно распределенной нагрузки на соответствующих участках;

5) транспонированный вектор эпюры моментов от нагрузки, вызывающей перемещения (без учета стрелок эпюр).

При записи исходной информации в файлы каждую группу целесообразно начинать с новой строки. При этом следует быть внимательным: эти файлы имеют текстовый тип, поддерживаемый языком Pascal, и каждая запись числа должна отделяться одним пробелом, а первое число в строке пишется без предшествующего пробела.

После того, как файлы исходных данных подготовлены, запускается программа в файле SETPEREM.EXE нажатием клавиши ENTER. Программа запрашивает о готовности исходной информации. Если файлы готовы, то нужно нажать клавишу Y , если нет, то N . При нажатии N программа выводит на экран структуру информации, записываемой в указанных файлах. После нажатия ENTER происходит возврат в окна Нортонa.

Если нажат ответ Y , то программа запрашивает информацию о размерности в диалоговом режиме следующим образом:

число искомых перемещений — в ответ вводится число θ ;

число участков системы — в ответ вводится число r ;

число сечений — в ответ вводится число h ;

число участков с равномерно распределенной нагрузкой — вводится число st ;

число участков с двумя расчетными сечениями — вводится C ;

число участков с одним расчетным сечением — вводится D .

После работы программа открывает в каталоге C:\PEREM файлRES, в который выводятся искомый вектор перемещений. Вместо многоточия название файла будет содержать имя или фамилию студента, введенную ра-

нее в первую строку файла APR1.DAT. Содержимое файла-результата можно распечатать, нажав функциональную клавишу F9 в режиме EDIT.

ПРИМЕР № 3

Вновь определим перемещение Δ_{1q} для рамы показанной на рис. 24. Будем учитывать только изгибные деформации.

В окне Нортонa подводим подсветку к имени файла APR1.DAT и нажимаем клавишу F4 — вызов редактора EDIT. На экране появляется изображение содержимого файла в символьном виде.

В файле APR1.DAT записываем фамилию и далее транспонированный вектор эпюры моментов от единичной силы

```
petrov
0 0 0 4 4 0
```

Нажимаем клавишу F2 — запись файла на жесткий диск. Нажимаем клавишу F10 — выход из режима EDIT. На экране снова окна Нортонa.

Коэффициенты податливостей участков равны

$$i_1 = i_3 = \frac{2}{6EJ_c} = 0.333333 \frac{1}{EJ_c}; \quad i_2 = \frac{4}{6EJ_p} = \frac{2}{3 \cdot 2EJ_c} = 0.333333 \frac{1}{EJ_c}.$$

Вычислим перемещение с точностью до множителя $\frac{1}{EJ_c}$.

В окне Нортонa подводим подсветку к имени файла APR2.DAT и нажимаем клавишу F4 — вызов редактора EDIT. На экране появляется изображение содержимого файла в символьном виде.

В файле APR2.DAT запишем

```
0.333333 0.333333 0.333333
```

2 2 2 — все участки с двумя сечениями

2 — номер участка с q

8 — величина стрелки

0 0 0 32 32 0 — вектор эпюры от нагрузки, вызывающей перемещение.

Напомним, что в файлах должны быть только символы в виде цифр, точек и пробелов, а указанные выше пояснения должны отсутствовать.

Нажимаем клавишу F2 — запись файла на жесткий диск. Нажимаем клавишу F10 — выход из режима EDIT. На экране снова окна Нортонa.

Подводим подсветку к имени файла SETPEREM.EXE и нажимаем клавишу ENTER.

Программа начинает работать и запрашивает: “Файлы c:\perem\apr1.dat и c:\perem\apr2.dat готовы Y/N?”. Мы отвечаем “Y”.

После этого происходит следующий диалог между нами и программой:

число искомых перемещений — в ответ вводится число 1;

число участков системы — в ответ вводится число 3;

число сечений — в ответ вводится число 6;

число участков с равномерно распределенной нагрузкой — вводится число 1;

число участков с двумя расчетными сечениями — вводится 3;

число участков с одним расчетным сечением — вводится 0.

После работы программа открывает в каталоге C:\PEREM файл petrov.res, в который выводятся искомое перемещение. Нажав клавишу F4, мы увидим

petrov
delta(1)=1.919998E+02 .

Содержимое файла-результата можно распечатать, нажав функциональную клавишу F9 в режиме EDIT.

Результат совпал с предыдущим, так как мантиссу 1.919998 нужно умножить на 10 в степени, равной порядку 2 — получится $191.9998 \approx 192$ с точностью 0.0001%.

ПРИМЕР № 4

Для рамы, показанной на рис. 27, определим горизонтальное перемещение точки K и вертикальное перемещение точки C . Проводим подготовку схемы к расчету в матричной форме. Определяем коэффициенты податливостей участков. При этом учитываем, что четыре первых из них работают на изгиб, а пятый — на растяжение/сжатие. Будем определять перемещения с точностью до множителя $\frac{1}{EJ_c}$.

$$i_1 = i_2 = i_4 = \frac{2EJ_c}{6EJ_c} = 0.333333; \quad i_3 = \frac{4EJ_c}{6EJ_p} = \frac{4EJ_c}{6 \cdot 2EJ_c} = 0.333333;$$

$$i_5 = \frac{4EJ_c}{2EA} = \frac{4^3}{2} = 32;$$

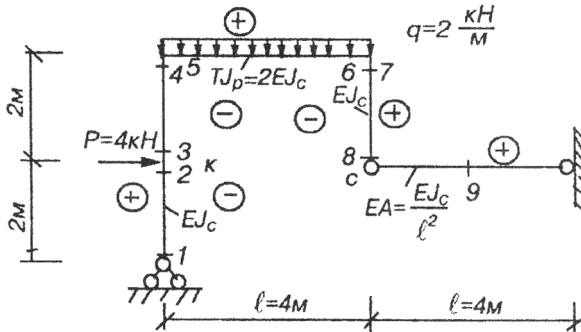


Рис. 27

Сначала построим эпюру внутренних факторов от заданной нагрузки, вызывающей перемещения (рис. 28, б). Для этого определим опорные реакции (рис. 28, а).

$$\sum m_A = 0; P \cdot 2 + q \cdot 4 \cdot 2 + R_B \cdot 2 = 0; R_B = -q \cdot 4 - P = -12 \text{ кН};$$

$$\sum m_K = 0; H_A \cdot 2 + q \cdot 4 \cdot 2 = 0; H_A = -8 \text{ кН};$$

$$\sum Y = 0; V_A - q \cdot 4 = 0; V_A = 8 \text{ кН};$$

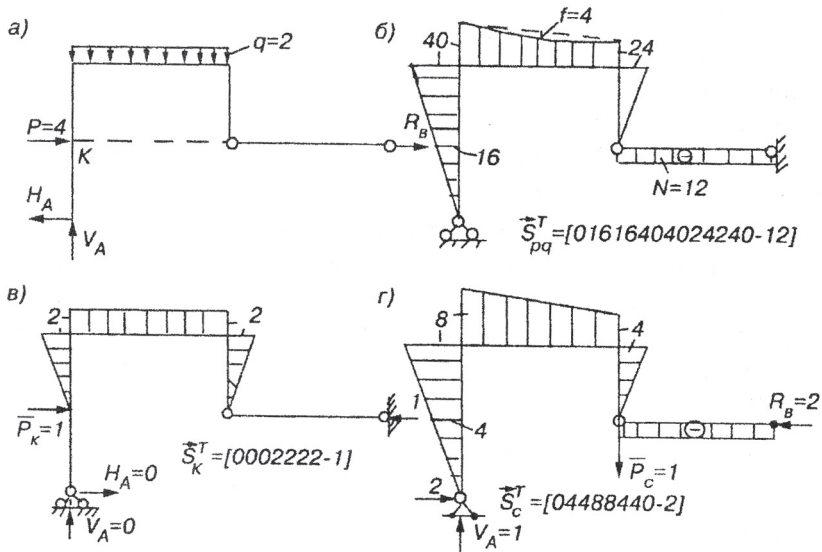


Рис. 28

В файле `c:\perem\lapr2.dat` запишем

```
0.333333 0.333333 0.333333 0.333333 32
2 2 2 2 1
3
-4
0 16 16 40 40 24 24 0 -12
```

Приложим поочередно единичные силы в точках K и C по направлениям искомых перемещений и построим эпюры внутренних силовых факторов (рис. 28, $в$ и 28, $г$).

В файле `c:\perem\lapr1.dat` запишем идентификатор пользователя и соответствующие транспонированные векторы

```
Kuzmin
0 0 0 2 2 2 2 0 -1
0 4 4 8 8 4 4 0 -2
```

Запускаем программу, находящуюся в файле `SETPEREM.EXE` и проводим с ней следующий диалог:

число искомых перемещений — в ответ вводим число 2;
число участков системы — в ответ вводится число 5;
число сечений — 9;
число участков с равномерно распределенной нагрузкой — 1;
число участков с двумя расчетными сечениями — 4;
число участков с одним расчетным сечением — 1.

В процессе работы программа открывает файл `c:\perem\kuzmin.res`, в который выводятся результаты расчета. Подведя подсветку в окне Нортонa к соответствующей строке и нажав клавишу F4, мы увидим

```
Kuzmin  
delta(1)=9.81333E+02  
delta(2)=2.35733E+03.
```

Таким образом, горизонтальное перемещение точки K равно $981.333/EJ_c$, а вертикальная составляющая перемещения точки C равна $2357.33/EJ_c$.

Наличие идентификатора пользователя удобно при проведении занятий в зале с несколькими ПЭВМ, работающими в сетевом режиме.

ПРИМЕР № 5

Определим вертикальную составляющую перемещения точки C в трехшарнирной арке, показанной на рис. 29, *a*. Сначала проведем вычисление с учетом только изгибных деформаций, а затем кроме изгиба учтем и деформации сжатия.

Первый вариант

Разбиваем схему на четыре участка, работающие на изгиб и строим эпюры моментов от нагрузки (рис. 29, *a*) и от единичной силы, приложенной по направлению искомого перемещения (рис. 29, *в*).

В файле `c:\perem\aprl.dat` записываем

```
name  
0 -0.2679494 -0.2679494 0 0 -0.2679494 -0.2679494 0
```

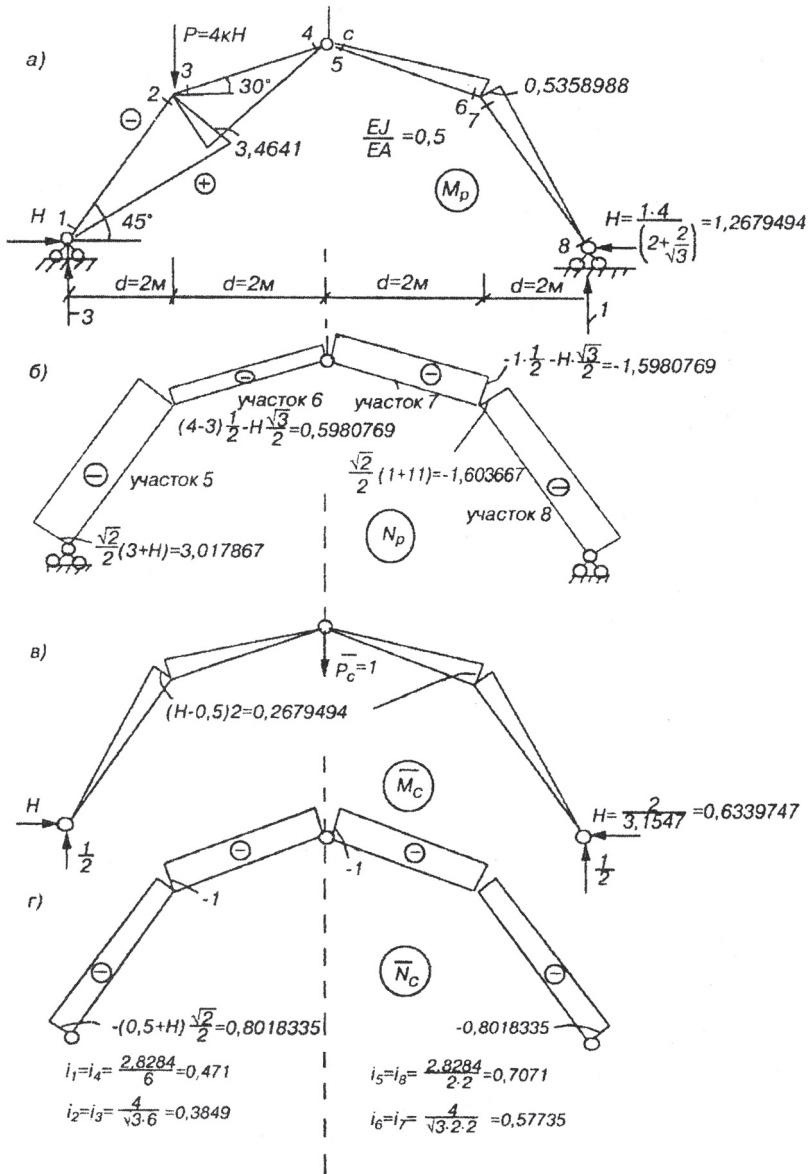


Рис. 29

В файле c:\perem\apr2.dat записываем

```
0.4714 0.3849 0.3849 0.4714
2 2 2 2
0 3.4641 3.4641 0 0 -0.53589 -0.53589 0
```

После запуска программа SETPEREM.EXE запрашивает:

число искомых перемещений — 1;

число участков системы — 4;

число сечений — 8;

число участков с равномерно распределенной нагрузкой — 0;

число участков с двумя расчетными сечениями — 4;

число участков с одним расчетным сечением — 0.

Результат содержится в файле c:\perem\name.res в виде:

name

delta(1)=-1.343722E+00.

Таким образом, по первому варианту расчета получается, что точка С имеет вертикальную составляющую перемещения, направленную вверх и равную $1.34372/EJ$.

Второй вариант

Отмечаем на схеме дополнительные участки, работающие на растяжение/сжатие.

Таких участков четыре. По существу один и тот же стержень арки учитывается как участок с двумя сечениями, в которых учитываются изгибающие моменты, и как участок с одним сечением, в котором учитывается нормальная сила.

Вычисляем ординаты эпюр нормальных сил для двух состояний системы (рис. 29, б и 29, з).

В файле c:\perem\apr1.dat записываем:

name

```
0 -0.2679494 -0.2679494 0 0 -0.2679494 -0.2679494 0
-0.8018335 -1 -1 -0.8018335
```

В файле c:\perem\apr2.dat записываем

```
0.4714 0.3849 0.3849 0.4714 0.7071 0.57735 0.57735 0.7071
2 2 2 2 1 1 1 1
0 3.4641 3.4641 0 0 -0.53589 -0.53589 0
```

-3.017867 -0.5980769 -1.5980769 -1.603667

После запуска программа SETPEREM.EXE запрашивает:

число искомым перемещений — 1;

число участков системы — 8;

число сечений — 12;

число участков с равномерно распределенной нагрузкой — 0;

число участков с двумя расчетными сечениями — 4;

число участков с одним расчетным сечением — 4.

Результат содержится в файле c:\perem\name.res в виде:

name

delta(1)= 6.43277E+00.

Таким образом, по второму варианту расчета получается, что точка *C* имеет вертикальную составляющую перемещения, направленную вниз и равную 6.43277/EJ.

Сопоставление результатов показывает, что в арочных системах (особенно пологих) необходимо при определении перемещений учитывать, кроме изгибных, деформации растяжения-сжатия.

2.6. Теоремы о взаимности работ и взаимности перемещений

Вернемся к формуле (2.13) для возможной работы A_{ij} сил в состоянии *i* на возможных перемещениях, вызванных силами в состоянии *j*. Можно заметить, что если переставить индексы и вычислить A_{ji} по (2.13), то получим ту же величину.

Таким образом

$$A_{ij} = A_{ji}. \quad (2.37)$$

Этот результат соответствует так называемой теореме Бетти — теореме о взаимности работ: возможная работа сил в состоянии *i* на возможных перемещениях, вызванных силами в состоянии *j*, равна возможной работе сил в состоянии *j* на возможных перемещениях, вызванных силами в состоянии *i*. Эта теорема справедлива для упругих систем

при малых деформациях. Покажем действие этой теоремы на примере рамы, в двух случаях нагружения (рис. 30).

В соответствии с (2.37) можем написать равенство

$$P_1 \cdot \Delta_{12} = m_2 \cdot \Delta_{21} \quad (2.38)$$

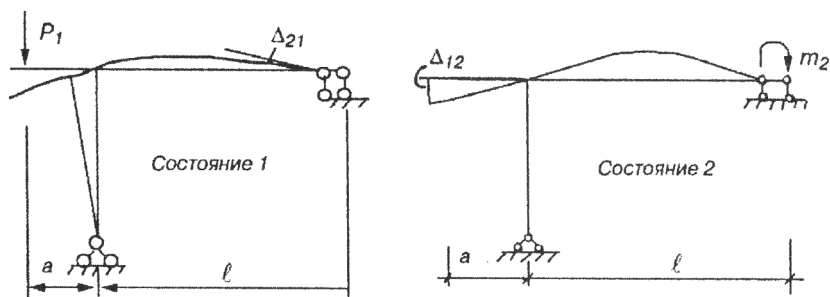


Рис. 30

Если представим, что P_1 и m_2 численно равны, то получим, что

$$\Delta_{12} = \Delta_{21} \quad (2.39)$$

Это соответствует теореме Максвелла о взаимности перемещений: перемещение по первому направлению от силового фактора, приложенного по второму направлению, численно равно перемещению по второму направлению от силового фактора, приложенного по первому направлению, если оба силовых фактора численно равны. Важно подчеркнуть, что в (2.39) соблюдается именно численное равенство. Физический смысл перемещений может быть совершенно различен. На рис. 30 Δ_{12} — прогиб левой консоли в метрах, а Δ_{21} — угол поворота сечения у правой опоры, выраженный в радианах.

Далее очень часто будут встречаться перемещения, вызванные единичными силовыми факторами. Такие перемещения будут обозначаться малой буквой δ с двумя индексами

и называться “единичными”. Тогда вместо (2.39) получим теорему о взаимности единичных перемещений

$$\delta_{ij} = \delta_{ji} . \quad (2.40)$$

2.7. Теорема Клайперона

В общем случае, при действии нескольких сил P_1, P_2, \dots, P_n действительную работу внешних сил можно вычислить по формуле (2.4)

$$A = \frac{1}{2} \sum P_i \Delta_i .$$

Здесь Δ_i — величина перемещения точки приложения силы P_i , совпадающего с направлением этой силы. Это перемещение возникает в результате совместного действия всех приложенных сил

$$\Delta_i = \Delta_{i1} + \Delta_{i2} + \dots + \Delta_{in} . \quad (2.41)$$

Для простоты докажем (2.4) для случая двух сил.

$$\Delta_1 = \Delta_{11} + \Delta_{12} \quad (2.42)$$

$$\Delta_2 = \Delta_{21} + \Delta_{22} . \quad (2.43)$$

Представим, что сначала действует сила P_1 , а затем сила P_2 . При этом, в силу малости перемещений по сравнению с размерами стержневой системы, можно считать, что сила P_2 приложена к недеформированной системе.

Сначала первая сила совершает работу

$$A_1 = \frac{1}{2} P_1 \Delta_{11} . \quad (2.44)$$

Затем вторая сила совершает работу на вызванном ею перемещении Δ_{22} , а сила P_1 при этом совершает дополнительную работу на перемещении Δ_{12} , вызванном второй силой

$$A_2 = \frac{1}{2} P_2 \Delta_{22} + P_1 \Delta_{12} . \quad (2.45)$$

Таким образом, работа двух сил равна

$$A = A_1 + A_2 = \frac{1}{2} P_1 \Delta_{11} + P_1 \Delta_{12} + \frac{1}{2} P_2 \Delta_{22}. \quad (2.46)$$

Если рассматривать процесс нагружения в противоположном порядке (сначала вторая сила, а затем первая), совершенная работа будет вычисляться по формуле

$$A = A_2 + A_1 = \frac{1}{2} P_1 \Delta_{11} + P_2 \Delta_{21} + \frac{1}{2} P_2 \Delta_{22}. \quad (2.47)$$

Величина работы не зависит от порядка приложения сил, так как в силу теоремы о взаимности работ

$$P_1 \Delta_{12} = P_2 \Delta_{21}. \quad (2.48)$$

Поэтому второе слагаемое в (2.46) можно представить

$$P_1 \Delta_{12} = \frac{1}{2} P_1 \Delta_{12} + \frac{1}{2} P_2 \Delta_{21}. \quad (2.49)$$

Подставляя (2.49) в (2.46), группируя слагаемые, относящиеся к каждой силе и учитывая (2.42) и (2.43), получим

$$A = \frac{1}{2} P_1 \Delta_1 + \frac{1}{2} P_2 \Delta_2. \quad (2.50)$$

Таким образом, теорема Клайперона доказана.

3. РАСЧЕТ СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМЫХ СТЕРЖНЕВЫХ СИСТЕМ С ПОМОЩЬЮ ПЭВМ МЕТОДОМ СИЛ

3.1. Метод сил для расчета статически неопределимых плоских стержневых систем

3.1.1. Степень статической неопределимости. Основная система

Статически неопределимыми системами называются системы, для расчета которых недостаточно только уравнений статики. Недостающие уравнения составляются путем рассмотрения упругих деформаций системы. Количество этих уравнений n называется степенью статической неопределимости.

Рассмотрим раму, показанную на рис. 31, *а* в виде замкнутого контура. Проведя разрез в любом месте K с целью вычисления внутренних силовых факторов (изгибающего момента, поперечной и нормальной сил), мы столкнемся с необходимостью предварительно найти реакции в опорных закреплениях. Общее число реакций — 6, а уравнений равновесия для плоской системы — 3. Недостаёт трех уравнений для определения всех реакций и далее всех внутренних силовых факторов. Тот же результат будет в случае замкнутого контура, показанного на рис. 31, *б*.

В этом случае реакции в опорных закреплениях можно определить из уравнений статики, но, сделав разрез в любом месте (рис. 31, *в*), мы с помощью уравнений равновесия сможем доказать только равенство внутренних силовых факторов на соседних “берегах” разреза, но не сможем определить их величину. Следовательно, рама в виде замкнутого контура трижды статически неопределима.

Посмотрим теперь, что изменится, если схема рамы будет содержать простой шарнир C_1 (простой шарнир — это

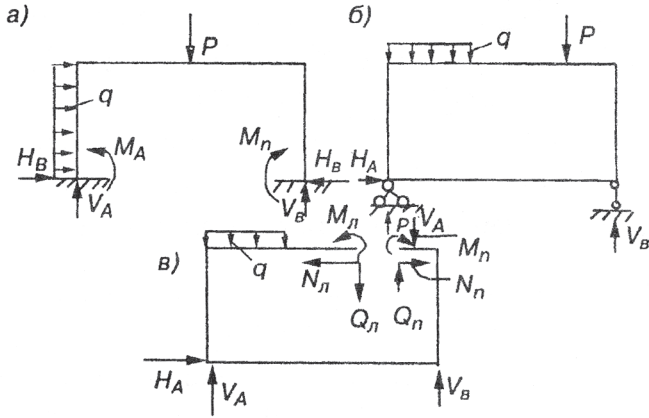


Рис. 31

шарнир, соединяющий два диска) (рис. 32, а). Тогда, дополнительно к имеющимся трем уравнениям равновесия рамы в целом, можно составить ещё одно уравнение равенства нулю момента левых или правых сил относительно этого шарнира

$$\sum m_{C_1} = 0.$$

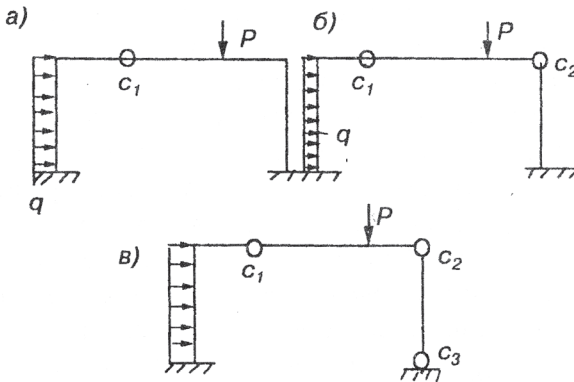


Рис. 32

При этом степень статической неопределимости будет уже равна двум — на единицу меньше. Увеличение числа простых шарниров будет уменьшать число n (рис. 32, б). В конце концов, получим статически определимую систему (рис. 32, в). Включение в контур более трех шарниров превращает систему в изменяемую.

Итак, включение в замкнутый контур простого шарнира снижает степень статической неопределимости на единицу. Представим теперь, что в плоской стержневой системе можно выделить K замкнутых контуров и $Ш$ простых шарниров. Тогда степень статической неопределимости можно вычислить по формуле

$$n = 3K - Ш . \quad (3.1)$$

ПРИМЕР № 1

Подсчитать степень статической неопределимости для схемы рамы на рис. 33.

Количество замкнутых контуров $K = 6$. Количество простых шарниров $Ш = 7$. Степень статической неопределимости $n = 3 \cdot 6 - 7 = 11$.

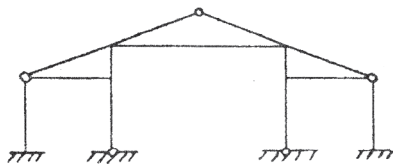


Рис. 33

Для расчета n раз статически неопределимой системы методом сил она преобразуется в другую систему путем устранения n связей. Полученная система должна быть геометрически неизменяемой и, как правило, статически определимой. Такая система называется основной системой.

Основная система находится под действием заданной нагрузки и неизвестных усилий и моментов, действующих в устраненных связях. Эти неизвестные обозначаются X_1, X_2, \dots, X_n . Основная система метода сил может быть выбрана многими способами. Строго говоря, бесконечно многи. Например, если в каком-то месте стержня убрать связь,

воспринимающую изгибающий момент (говорят “врезать шарнир”), и менять положение шарнира по длине стержня, то основная система будет каждый раз новая. Несколько вариантов основной системы для дважды статически неопределимой рамы (рис. 34) показаны на рис. 35.

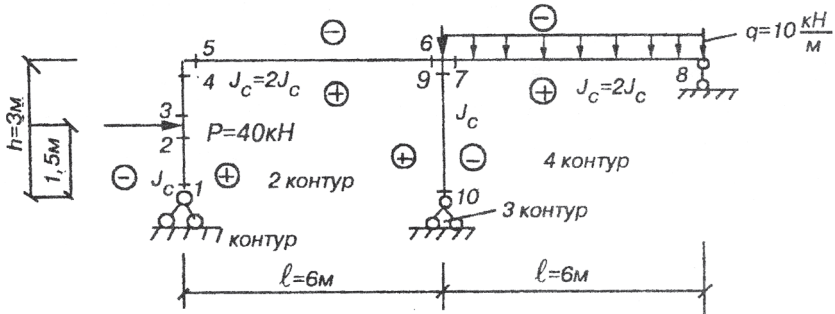


Рис. 34

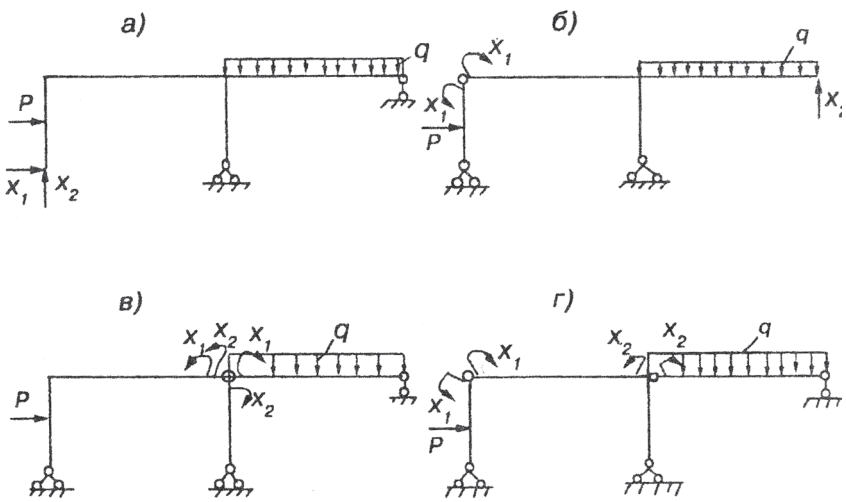


Рис. 35

3.1.2. Матричный алгоритм метода сил

Дополнительные уравнения по этому методу выражают условия, что основная система по направлению отброшенных связей должна деформироваться точно так же, как заданная. Таких условий будет n — по числу отброшенных связей. Таким образом, для любой основной системы можно составить n уравнений деформации, из которых затем определить n неизвестных X_i .

Алгоритм расчета статически неопределимой системы методом сил в матричной форме проследим на примере конкретной рамы (рис. 34). При этом формулы будут приводиться для общего случая.

1. Разбиваем раму на участки, работающие на изгиб

Начало и конец каждого участка отмечаем сечениями с индивидуальным номером. Для каждого участка принимаем свое правило знаков для ординат эпюры моментов, отложенных в сторону растянутого волокна. Обозначим количество участков системы $r = 5$, количество сечений $H = 10$.

Конечной целью расчета является вычисление моментов в отмеченных сечениях, образующих вектор \vec{M} , имеющий в транспонированном виде структуру:

$$\vec{M}^t = [m_1 \quad m_2 \quad \dots \quad m_{10} \quad \dots \quad m_H] . \quad (3.2)$$

2. Подсчет степени статической неопределимости

Количество замкнутых контуров (включая опорные) $K = 4$.

Количество простых шарниров (в сечениях 1 и 10 — шарниры сложные и содержат по два простых) $Ш = 10$. По формуле (3.1) получим $n = 3 \cdot 4 - 10 = 2$.

Рама два раза статически неопределимая.

3. Выбор основной системы

Каждому варианту основной системы соответствует свой объем перерабатываемой числовой информации. Практика расчетов показывает, что наиболее устойчивые ре-

зультаты получаются для основных систем, деформированный вид которых близок к виду деформации заданной системы. Этому условию удовлетворяет основная система, показанная на рис. 35, з. Она представляет собой трехшарнирную раму $ABCT$ и опирающийся на нее диск в виде балки CD с шарниром в сечении 7 и связью в сечении 8, не проходящей через этот шарнир — система геометрически неизменяемая и статически определимая. Основная система находится под действием заданной нагрузки и неизвестных моментов, образующих вектор неизвестных

$$\vec{X} = [X_1 \ X_2 \ \dots \ X_n]. \quad (3.3)$$

Для нашей системы $n=2$.

4. Составление системы уравнений деформации

Первое уравнение выражает тот факт, что в заданной системе сечения 4 и 5 поворачиваются на один и тот же угол, то есть разность поворотов сечений 4 и 5 должна быть равна нулю. В общем случае эта разность зависит от X_1, X_2, P и q .

$$\Delta_1(X_1, X_2, P, q) = 0.$$

Второе уравнение выражает тот факт, что в заданной системе разность углов поворота сечений 6 и 7 должна быть равна нулю (сечение 6 поворачивается на тот же угол, что и сечение 7, так как узел 6-7-9 жесткий). Таким образом,

$$\Delta_2(X_1, X_2, P, q) = 0.$$

Все рассматриваемые перемещения малы по сравнению с размерами системы, поэтому справедлив принцип независимости действия сил. Каждое перемещение от нескольких факторов равно сумме соответствующих перемещений от каждого фактора, приложенного отдельно:

$$\Delta_1 = \Delta_{1X_1} + \Delta_{1X_2} + \Delta_{1P} + \Delta_{1q} = 0;$$

$$\Delta_2 = \Delta_{2X_1} + \Delta_{2X_2} + \Delta_{2P} + \Delta_{2q} = 0.$$

Далее учтем, что перемещения от каждого неизвестного X_i пропорциональны его величине (закон Гука)

$$\Delta_{jX_i} = \delta_{ji} X_i,$$

где δ_{ji} — коэффициент пропорциональности.

Если $X_i = 1$, то $\Delta_{jX_i} = \underline{\delta}_{ji}$, то есть δ_{ji} — это перемещение по направлению j от $X_i = 1$ в основной системе. Здесь над обозначением неизвестного поставлена черточка для того, чтобы отметить, что это не действительное искомое усилие по направлению отброшенной связи, а силовой фактор, приложенный по тому же направлению но конкретной величины равной единице.

Таким образом, получаем систему

$$\begin{cases} \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \Delta_{1P} + \Delta_{1q} = 0; \\ \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \Delta_{2P} + \Delta_{2P} = 0. \end{cases}$$

которая называется канонической системой уравнений метода сил. Какова бы ни была фактически два раза статически неопределимая система, уравнения для определения неизвестных будут иметь тот же вид. Первые индексы при коэффициентах имеют индекс соответствующий номеру уравнения. Вторые индексы увеличиваются от 1 до n (в нашем случае $n=2$).

Если для n раз статически неопределимой системы ввести матрицу, компоненты которой представляют собой коэффициенты при неизвестных δ_{ij} ,

$$L_{\delta} = \begin{bmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} & \cdots & \delta_{1j} & \cdots & \delta_{1n} \\ \delta_{21} & \delta_{22} & \cdots & \delta_{2j} & \cdots & \delta_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \delta_{i1} & \delta_{i2} & \cdots & \delta_{ij} & \cdots & \delta_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \delta_{n1} & \delta_{n2} & \cdots & \delta_{nj} & \cdots & \delta_{nn} \end{bmatrix} \quad (3.4)$$

и матрицу свободных членов (перемещений от заданной нагрузки)

$$\vec{\Delta}_P = [\Delta_{1P} \quad \Delta_{2P} \quad \dots \quad \Delta_{iP} \quad \dots \quad \Delta_{nP}], \quad (3.5)$$

то систему канонических уравнений метода сил можно записать в виде матричного уравнения

$$L_\delta \cdot \vec{X} = -\vec{\Delta}_P. \quad (3.6)$$

Здесь индексом P обозначена любая внешняя нагрузка.

5. Определение коэффициентов канонических уравнений

Все компоненты матриц (3.4) и (3.5) представляют собой перемещения. Поэтому для их определения можно применить формулу Мора в виде (2.28).

Таким образом,

$$\delta_{ij} = \vec{M}_i \cdot \vec{V} \cdot \vec{M}_j, \quad (3.7)$$

$$\Delta_{iq} = \vec{M}_i \cdot \vec{V} \cdot \vec{M}_q. \quad (3.8)$$

В формулах (3.7) и (3.8) указаны векторы эпюр внутренних силовых факторов от каждого $\bar{X}_i = 1$, приложенного в основной системе по направлению отброшенной связи с номером i , и от заданной внешней нагрузки P .

В нашем случае это эпюры M_1, M_2 и M_p (рис. 36).

Записываем эпюры от единичных сил в виде матриц-столбцов и формируем из них матрицу влияния моментов в основной системе

$$L_m = \begin{bmatrix} \vec{M}_1 & \vec{M}_2 & \dots & \vec{M}_n \end{bmatrix}. \quad (3.9)$$

В нашем случае

$$L_m^t = \begin{bmatrix} 0 & 0.5 & 0.5 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Записываем эпюру от нагрузки в виде вектора

$$\vec{M}_{q_p}^{tf} = [0 \quad 30 \quad 30 \quad 0 \quad 0 \quad -60 \quad 0 \quad 45 \quad 0 \quad -60 \quad 0],$$

в котором между сечениями 7 и 8 учтена стрелка $f = 45$.

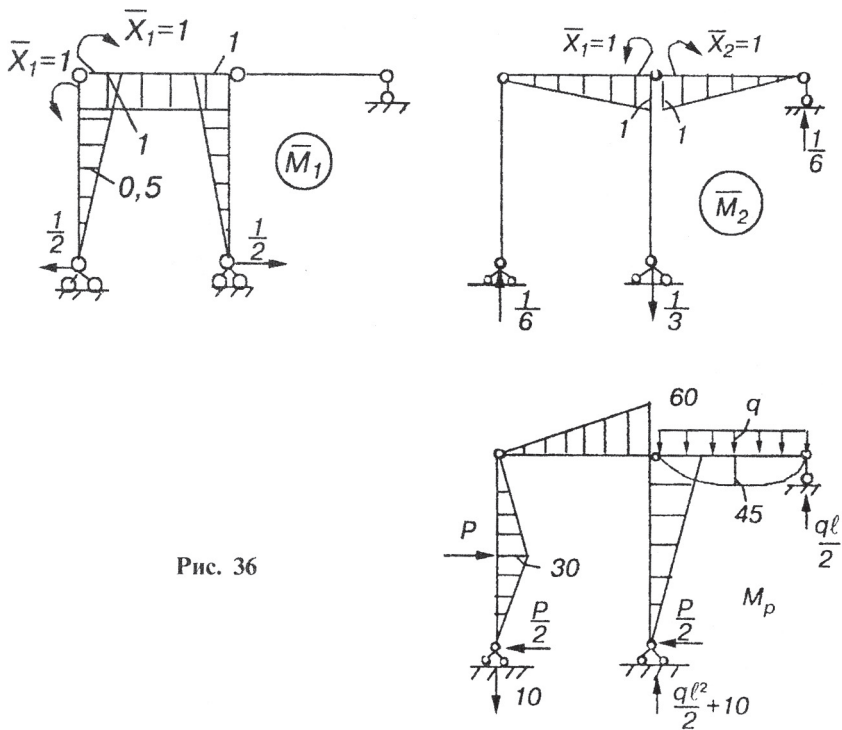


Рис. 36

Если в формулах (3.7) и (3.8) вместо первых сомножителей поставить транспонированную матрицу L_m , то получим, как в (2.36), матрицы-столбцы перемещений по направлениям отброшенных связей в основной системе соответственно от $\bar{X}_j = 1$ и заданной нагрузки P

$$\vec{\delta}_j = L_m^t \cdot B \cdot \vec{M}_j, \quad (3.10)$$

$$\vec{\Delta}_P = L_m^t \cdot B_f \cdot \vec{M}_P^f. \quad (3.11)$$

Индекс f у матрицы податливости системы B означает, что в векторе M_P учтены стрелки криволинейных эпюр.

Если на место третьего сомножителя в (3.10) поставить матрицу L_m , то получим полную матрицу единичных перемещений

$$L_{\delta} = L_m' \cdot B \cdot L_m \cdot \quad (3.12)$$

6. Решение системы канонических уравнений

Систему уравнений можно решить с помощью обратной матрицы L_{δ}^{-1} , которую можно вычислить известными из курса математики способами (в том числе с помощью ЭВМ). Для этого умножим левую и правую стороны (3.6) на L_{δ}^{-1}

$$L_{\delta}^{-1} \cdot L_{\delta} \cdot \vec{X} = -L_{\delta}^{-1} \cdot \vec{\Delta}_P \cdot \quad (3.13)$$

Далее учтем, что произведение исходной матрицы на обратную (в любой последовательности) дает единичную, которая, будучи умноженной на любую другую, последнюю не изменяет.

Таким образом, решение системы канонических уравнений метода сил имеет следующий вид

$$\vec{X} = -L_{\delta}^{-1} \cdot \vec{\Delta}_P \cdot \quad (3.14)$$

7. Вычисление ординат окончательной эпюры внутренних силовых факторов (3.2)

Изгибающий момент в любом сечении статически неопределимой системы можно вычислить, используя принцип независимости действия сил, суммируя в этом сечении моменты от нагрузки и усилий в отброшенных связях X_i , действующие в основной системе. Моменты от X_i можно вычислить, умножая ординаты единичной эпюры \bar{M}_i на уже известную величину X_i . Таким образом, для сечения с номером k будем иметь

$$m_k = m_k^P + \sum_{i=1}^n \bar{m}_k^{-i} \cdot X_i \cdot$$

Эта процедура для всей системы описывается следующей формулой

$$\vec{M} = \vec{M}_P + L_m \cdot \vec{X} \cdot \quad (3.15)$$

Подставим в (3.14) выражения (3.11) и (3.12), а затем все это в (3.15), получим

$$\vec{M} = \vec{M}_P - L_m \cdot (L_m^t \cdot B \cdot L_m)^{-1} \cdot L_m^t \cdot B_f \cdot \vec{M}_P^f. \quad (3.16)$$

В этом алгоритме присутствуют три матрицы: матрица L_m формируется из столбцов единичных эпюр, вектор M_P представляет собой столбец эпюры от нагрузки и матрица податливости системы B , которая формируется по схеме (2.29). Все остальное выполняется по правилам матричной алгебры.

Для систем, где нужно учитывать как деформации изгиба так и растяжения-сжатия, в формуле (3.16) нужно использовать векторы, имеющие структуру (2.33)

$$\vec{S} = \vec{S}_P - L_S \cdot (L_S^t \cdot B \cdot L_S)^{-1} \cdot L_S^t \cdot B_f \cdot \vec{S}_P^f. \quad (3.17)$$

3.1.3. Программа SETAPR.EXE. Примеры

Процедура вычисления вектора внутренних усилий в отмеченных сечениях статически неопределимой системы (3.17) составила алгоритм программы, находящейся в файле SETAPR.EXE и написанной на языке программирования Turbo Pascal 6.0. Для работы программы должны быть предварительно заполнены файлы APR1.DAT и APR2.DAT, находящиеся в каталоге C:\X_Z.

Порядок работы с файлами описан в п. 1.3.

В файле APR1.DAT в режиме EDIT в первой строке записывается имя или фамилия студента латинскими буквами, а в последующих строках — транспонированные векторы эпюр внутренних усилий в основной системе метода сил от единичных силовых факторов $X_i = 1$, приложенных по направлениям отброшенных связей.

В файле APR2.DAT в режиме EDIT записывается по группам следующая информация:

1) массив коэффициентов i_k податливостей участков, т.е. есть массив числовых множителей перед матрицами подат-

ливости участков в формулах (2.25), (2.27), (2.31), (2.34) Если участок работает на изгиб с двумя расчетными сече-

ниями или с одним, то $i_k = \frac{\ell_k \cdot EJ_o}{6EJ_k}$. Если участок работает

на растяжение или сжатие, то $i_k = \frac{\ell_k \cdot EJ_o}{2EF_k}$. За EJ_o можно

принять жесткость любого сечения. Дело в том, что при вычислении усилий в статически неопределимой системе методом сил достаточно знать только относительные жесткости сечений.

2) массив чисел, каждое из которых соответствует числу расчетных сечений на участке системы (массив состоящий из 2 и 1);

3) массив номеров участков, где действует равномерно распределенная нагрузка;

4) массив значений стрелок эпюр f от действия равномерно распределенной нагрузки на соответствующих участках;

5) транспонированный вектор эпюры внутренних усилий от нагрузки, (без учета стрелок эпюр).

При записи исходной информации в файлы каждую группу целесообразно начинать с новой строки. При этом следует быть внимательным: эти файлы имеют текстовый тип, поддерживаемый языком Pascal, и каждая запись числа должна отделяться одним пробелом, а первое число в строке пишется без предшествующего пробела.

После того, как файлы исходных данных подготовлены, запускается программа в файле SETAPR.EXE нажатием клавиши ENTER. Программа запрашивает о готовности исходной информации. Если файлы готовы, то нужно нажать клавишу Y, если нет, то N. При нажатии N программа выводит на экран структуру информации, записываемой в указанных файлах. После нажатия ENTER происходит возврат в окна Нортонa.

Если нажат ответ Y, то программа запрашивает информацию о размерности в диалоговом режиме следующим образом:

степень статической неопределимости — в ответ вводится n ;

число участков системы — в ответ вводится число r ;

число сечений — в ответ вводится число h ;

число участков с равномерно распределенной нагрузкой — вводится число st ;

число участков с двумя расчетными сечениями — вводится C ;

число участков с одним расчетным сечением — вводится D ;

признак метода расчета (метод сил — 0; метод перемещений — 1) — вводится 0.

После работы программа открывает в каталоге C:\X_Z файл ...RES, в который выводятся искомые векторы \vec{X}, \vec{S} . Вместо многоточия название файла будет содержать имя или фамилию студента, введенную ранее в первую строку файла APR1.DAT. Содержимое файла-результата можно распечатать, нажав функциональную клавишу F9 в режиме EDIT.

ПРИМЕР № 2

Закончим расчет рамы показанной на рис. 34. Необходимые эпюры показаны на рис. 36.

В файле APR1.DAT записываем следующую исходную информацию:

```
name  
0 0.5 0.5 1 1 1 0 0 1 0  
0 0 0 0 0 1 1 0 0 0
```

В файле APR2.DAT в первой строке записываем массив коэффициентов податливостей участков по формуле

$$i_k = \frac{\ell_k \cdot EJ_c}{6EJ_k} \text{ и далее, как указано выше:}$$

0.25 0.25 0.5 0.5 0.5
 2 2 2 2 2
 4
 45
 0 30 30 0 0 -60 0 0 -60 0

Запускаем программу, хранящуюся в файле setarg.exe. В процессе работы происходит следующий диалог:

степень статической неопределимости — в ответ вводится 2;
 число участков системы — в ответ вводится число 5;
 число сечений — в ответ вводится число 10;
 число участков с равномерно распределенной нагрузкой — вводится число 1;
 число участков с двумя расчетными сечениями — вводится 5;
 число участков с одним расчетным сечением — вводится 0;
 признак метода расчета (метод сил — 0; метод перемещений — 1) — вводится 0.

После работы программа создает в каталоге C:\X_Z файл name.res, в который выводятся искомые векторы \vec{X}, \vec{S}

$$\vec{S} = [0 \ 45 \ 45 \ 30 \ 30 \ -45 \ -45 \ 0 \ -30 \ 0];$$

$$\vec{X} = [30 \ -15]$$

Окончательная эпюра моментов показана на рис. 37, а.

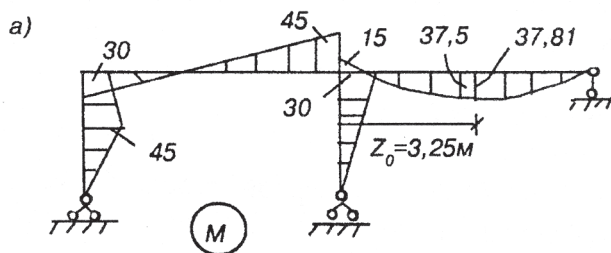


Рис. 37, а

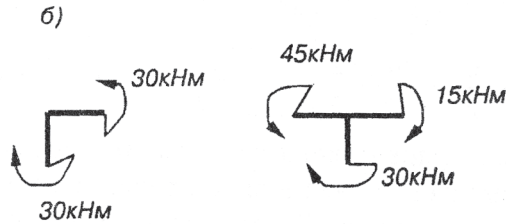


Рис. 37, б

Проверку правильности построения окончательной эпюры моментов проведем двумя способами — статическим и деформационным. Первый способ состоит в проверке равновесия узлов рамы. Вырежем узлы 4–5 и 6–7–9 (рис. 37, б) и покажем действующие в сечениях изгибающие моменты. Вращение узлов должно отсутствовать, то есть сумма приложенных к узлу моментов должна быть равна нулю. В нашем случае проверка удовлетворяется.

Второй способ (деформационная проверка) состоит в определении перемещения, величина которого заранее известна (например, должна быть равна нулю). Перемещение определяется, как правило, по формуле Мора. За единичное состояние можно принять состояние основной системы под действием какого-либо $X_i = 1$, либо состояние, когда действуют все $X_i = 1$ (суммарное единичное состояние). В результате перемножения эпюр M и M_i должен получиться 0, так как это свидетельствует о выполнении исходного условия о равенстве 0 перемещения по направлению отброшенной связи с номером i . Во всех случаях имеются в виду так называемые “обобщённые перемещения” — в нашем случае разность углов поворота сечений. Найдем разность углов поворота сечений 4 и 5.

Это можно сделать с помощью программы SETPEREM.EXE или по обычной формуле Мора с применением правила Верещагина. Воспользуемся последним способом. При выполнении лабораторных работ это целесообразно, так как студент должен знать классические формулы.

$$\Delta_1 = \sum \int \frac{\bar{M}_1 M dS}{EJ} = \left[\frac{0.5 \cdot 0.5}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 45 + \frac{1.5}{6} (2 \cdot 0.5 \cdot 45 + 2 \cdot 1 \cdot 30 + 45 \cdot 1 + 30 \cdot 0.5) + \frac{(30-45)}{2} \cdot \frac{6}{2} \cdot 1 - \frac{30 \cdot 3}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 \right] / EJ_C = \frac{1}{EJ_C} [11.25 + 41.25 - 52.5] = 0.$$

Проверка удовлетворяется. Таким образом, ординаты эпюры моментов в заданной статически неопределимой системе найдены верно. В этих случаях говорят, что статическая неопределимость “раскрыта”.

После этого, остальные внутренние силовые факторы (Q и N) можно найти, используя уравнения равновесия частей рамы.

При построении эпюры Q на каждом участке можно применять дифференциальную зависимость

$$\frac{\partial M}{\partial z} = Q. \quad (3.18)$$

При этом, если эпюра моментов очерчена прямой линией и отложена в сторону растянутого волокна, то значение Q по модулю равно тангенсу угла наклона линии эпюры моментов к оси стержня

$$|Q| = |\operatorname{tg} \alpha_M| = \left| \frac{M_{pr} - M_{lev}}{l} \right|, \quad (3.19)$$

а знак определяется следующим образом: если ось стержня поворачивается при совмещении с эпюрой по часовой стрелке, то $Q > 0$, если против, то $Q < 0$.

Участок 1-2. $Q = 45/1.5 = 30$ кН.

Участок 3-4. $Q = -(45-30)/1.5 = -10$ кН.

Участок 5-6. $Q = -(45+30)/6 = -12.2$ кН.

Участок 9-10. $Q = 30/3 = 10$ кН.

Там, где эпюра моментов криволинейная (участок 7–8), поступим следующим образом. Вырежем этот участок из состава рамы и рассмотрим его равновесие отдельно (рис. 38, а). Покажем на оставшейся части внешнюю нагрузку, моменты в сечениях и неизвестные поперечные силы

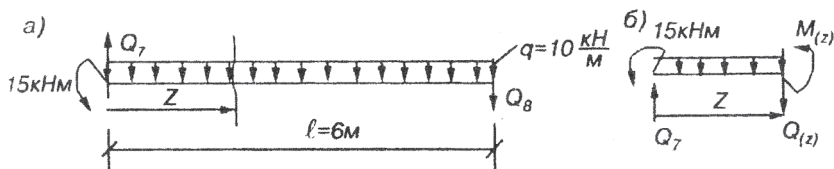


Рис. 38

Q в положительном направлении — так, что они стремятся вращать стержень по часовой стрелке относительно ближайшей к сечению точки на оси стержня.

$$\sum m_8 = 0; \quad -15 - q \cdot 6 \cdot 3 + Q_7 \cdot 6 = 0; \quad Q_7 = \frac{15 + 180}{6} = 32.5 \text{ Кн}$$

$$\sum m_7 = 0; \quad 15 - q \cdot 6 \cdot 3 - Q_8 \cdot 6 = 0; \quad Q_8 = \frac{15 - 180}{6} = -27.5 \text{ Кн}$$

Проведем разрез на расстоянии z отсечения 7 и рассмотрим равновесие левой оставшейся части (рис. 38, б).

$$\sum Y = 0; \quad Q_7 - q \cdot z - Q(z) = 0; \quad Q(z) = Q_7 - q \cdot z = 32.5 - q \cdot z.$$

Эпюра Q на участке, где действует равномерно распределённая нагрузка, всегда очерчивается прямой линией, наклонной к оси стержня и соединяющей ординаты по краям участка. На рис. 39 показана эпюра Q для всей системы.

На участке 7–8 поперечная сила меняет знак — в этом месте функция изгибающего момента имеет экстремум.

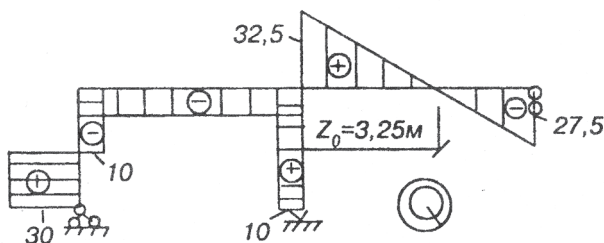


Рис. 39

$$Q = 32.5 - q \cdot z_0 = 0; z_0 = 3.25;$$

$$M_{\max} = -15 + Q_7 \cdot z_0 - \frac{q \cdot z_0^2}{2} = -15 + 32.5 \cdot 3.25 - \frac{10 \cdot 3.25^2}{2} = 37.81 \text{ кНм.}$$

Точка с экстремальным значением изгибающего момента находится правее середины участка 7–8 (рис. 39).

При построении эпюры продольных (нормальных) сил следует учесть, что если внешняя нагрузка действует перпендикулярно оси участка, к которому она приложена, то $N = \text{const}$ по длине участка. Значения продольных сил в сечениях рамы определяют из условий равновесия её узлов.

Вырежем узлы 4–5 и 6–7–9, покажем действующие на них в сечениях известные поперечные силы и неизвестные продольные (рис. 40).

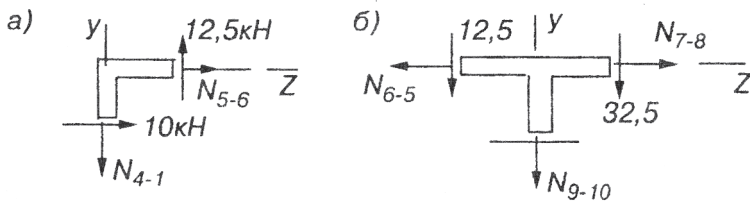


Рис. 40

Узел 4–5 (рис 40, а):

$$\sum Z = 0; \quad N_{5-6} + 10 = 0; \quad N_{5-6} = -10 \text{ кН.}$$

$$\sum Y = 0; \quad 12.5 - N_{4-1} = 0; \quad N_{4-1} = 12.5 \text{ кН.}$$

Узел 6-7-9 (рис. 40, б):

$$\sum Z = 0; \quad N_{7-8} - N_{6-5} - 10 = 0; \quad N_{7-8} = N_{6-5} + 10 = -10 + 10 = 0;$$

$$\sum Y = 0; \quad 12.5 + 32.5 + N_{9-10} = 0; \quad N_{9-10} = -45 \text{ кН.}$$

эпюра N показана на рис. 41, а.

Теперь необходимо сделать проверку равновесия рамы в целом. Для этого освободим раму от опор и покажем внутренние силовые факторы в опорных сечениях (рис. 41, б). Под действием этих сил и заданной нагрузки рама должна находиться в равновесии.

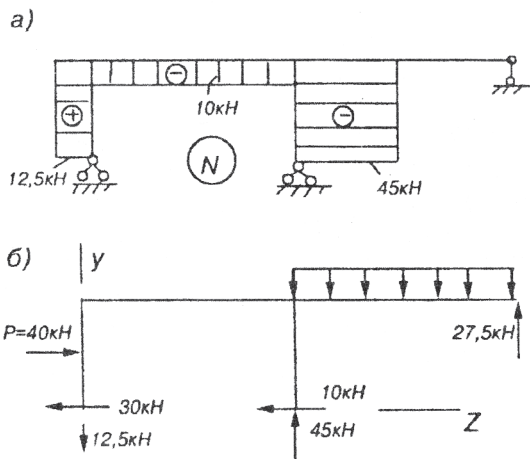


Рис. 41

$$\begin{aligned} \sum Z &= 0; & 40 - 30 - 1 &= 0; \\ \sum Y &= 0; & 45 - 12.5 + 27.5 - 10 \cdot 6 &= 0; \\ \sum m_1 &= 0; & 40 \cdot 1.5 - 45 \cdot 6 + 10 \cdot 6 \cdot 9 - 27.5 \cdot 12 &= 0. \end{aligned}$$

Условия удовлетворяются. Следовательно, все эпюры построены верно.

ПРИМЕР № 3

Построить эпюры M и N в статически неопределимой системе (рис. 42, а).

Система представлена статически неопределимой балкой с упруго податливой опорой. Количество замкнутых контуров $K=1$, количество простых шарниров $Ш=2$. Степень статической неопределимости $n=3 \cdot K - Ш=1$. Отбрасываем упругую опору, прикладываем действующее в ней неизвестное усилие X_1 и учитываем в расчете деформации изгиба и растяжения-сжатия. Размечаем расчетные сечения — № 1 и № 2 для изгиба и № 3 для продольной деформации. Для каждого участка устанавливаем правило знаков (рис. 42, а). Основ-

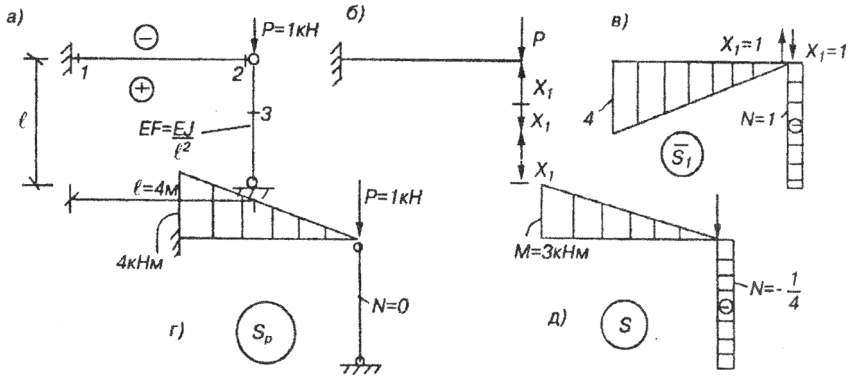


Рис. 42

ная система показана на рис. 42, б. Эпюры внутренних силовых факторов от действия $X_1 = 1$ и силы P в основной системе показаны соответственно на рис. 42, в и 42, г. Записываем их в виде матриц-столбцов (векторов) со структурой по (2.33), где $C=1$; $D=1$.

$$\vec{S}_1 = [m_{11} \quad m_{21} \quad n_{31}] = [4 \quad 0 \quad -1];$$

$$\vec{S}_P = [m_{1P} \quad m_{2P} \quad n_{3P}] = [-4 \quad 0 \quad 0].$$

Определяем коэффициенты податливостей участков, умноженных на модульную жесткость (в этом расчете — жесткость сечения балки при изгибе):

$$i_1 = \frac{l_1 \cdot EJ}{6EJ} = \frac{4}{6} = 0.6666666; i_2 = \frac{l_2 \cdot EJ}{2 \cdot EF_2} = \frac{4 \cdot 16}{2} = 32.$$

В файле c:\X_Zlapr1.dat записываем фамилию студента и с новой строки — вектор внутренних усилий от $X_1 = 1$:

```
Petrov
4 0 -1
```

В файле c:\X_Zlapr2.dat, учитывая отсутствие равномерно распределённой нагрузки, записываем:

0.666666 32

2 1

-4 0 0

Запускаем программу, хранящуюся в файле setapr.exe. В процессе работы происходит следующий диалог:

степень статической неопределимости — в ответ вводится 1;

число участков системы — в ответ вводится число 2;

число сечений — в ответ вводится число 3;

число участков с равномерно распределенной нагрузкой — вводится число 0;

число участков с двумя расчетными сечениями — вводится 1;

число участков с одним расчетным сечением — вводится 1;

признак метода расчета (метод сил — 0; метод перемещений — 1) — вводится 0.

После работы программа открывает в каталоге $C:\backslash X_Z$ файл retrov.res, в который выводятся искомые векторы \vec{X}, \vec{S}

$$S(1)=-3.00000E+00$$

$$X=-2.50000E-01$$

$$S(2)=0.00000E+00$$

$$S(3)=-2.50000E-01$$

18

Окончательная эпюра внутренних силовых факторов показана на рис. 42, д.

Этот результат показывает влияние податливости правой опоры на распределение усилий: если опора абсолютно жёсткая, то балка не изгибается, а действие внешней нагрузки воспринимается только сжатием опорного стержня на величину силы; если опора отсутствует, то балка изгибается как консольная — при этом момент в сечении l равен $m_l = -P \cdot l = -4$ кНм. Наша система при учете податливости опоры дает результат, находящийся между этими крайними случаями.

3.2. Расчет статически неопределимых балок на подвижную нагрузку

3.2.1. Матрица влияния усилий в неразрезной балке

В пункте 2.5.1 показан способ построения линий влияния усилий в многопролетных статически определимых балках с помощью матрицы влияния моментов L_m . Применим тот же способ при построении линий влияния изгибающих моментов и опорных реакций в многопролетных неразрезных балках на упруго податливых опорах. Жесткость сечений балки на изгиб может быть переменной. Для построения матрицы влияния внутренних усилий L_S будем загружать балку единичной одиночной силой, действующей поочередно во всех заранее отмеченных сечениях, и каждый раз проводить расчет статически неопределимой балки с помощью программы BALSET1. Полученные результаты запишем в виде векторов, которые, будучи составленными вместе, образуют L_S , структура которой имеет вид:

$$L_S = \begin{bmatrix} \vec{S}_1 & \vec{S}_2 & \dots & \vec{S}_H \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vec{M}_1 & \vec{M}_2 & \dots & \vec{M}_H \\ \vec{R}_1 & \vec{R}_2 & \dots & \vec{R}_H \end{bmatrix}, \quad (3.20)$$

где H — количество точек на оси балки, где поочередно действует сила $\vec{P}_i = 1$.

Таким образом, в каждом векторе \vec{S}_i сначала перечисляются ординаты изгибающих моментов в сечениях балки M_i , а затем величины нормальных сил в опорных стержнях R_i , моделирующих упруго податливые опоры.

Как указывалось в п. 2.5.1, если в матрице L_S выделить строку с номером t , равным номеру сечения балки, работающему на изгиб, то это будут ординаты линии влияния изгибающего момента M_t в неразрезной балке. Если выделенная строка соответствует продольному усилию в опорном стержне, то её ординаты представляют собой ординаты линии влияния этого усилия, то есть по существу это будут ординаты линии влияния опорной реакции, взятой с обратным знаком.

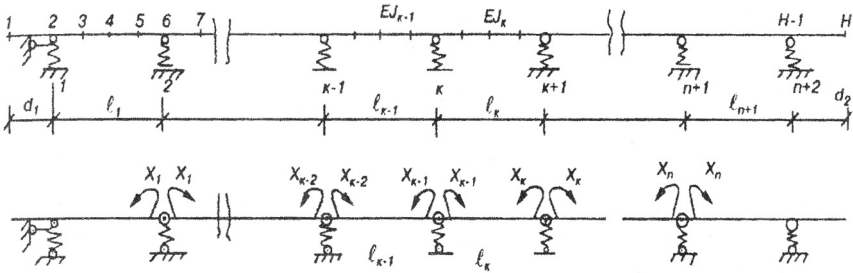


Рис. 43

Для расчета балки (рис. 43, а) на каждое единичное воздействие применим метод сил по алгоритму (3.17). Степень статической неопределенности равна числу промежуточных опор n .

Основную систему (рис. 43, б) образуем из заданной путем удаления над каждой промежуточной опорой связи, воспринимающей изгибающий момент, и введения неизвестных X_i , действующих по направлению этих связей.

В основной системе строим эпюры изгибающих моментов и усилий в упругих опорах от $\bar{X}_i = 1$ (рис. 44, а) и образуем матрицу влияния усилий в основной системе L_S^0 . Наша основная система отличается тем, что от каждого неизвестного моменты и опорные реакции возникают только в двух сопряженных пролетах. Поэтому вектор \vec{S}_k^0 от $\bar{X}_k = 1$

(рис. 44, а) в матрице L_S^0 будет иметь вид

$$\vec{S}_k^0 = [0 \dots 0 \ 0.25 \ 0.5 \ 0.75 \ 1 \ 0.75 \ 0.5 \ 0.25 \ 0 \dots 0 \ -R_{k-1} \ R_k \ -R_{k+1} \ 0].$$

При каждом положении единичной силы в основной системе строится эпюра изгибающих моментов и усилий в опорных стержнях (рис. 44, б) и записывается в виде вектора \vec{S}_P^0 . Например для силы, стоящей в четверти пролета, этот вектор будет иметь вид

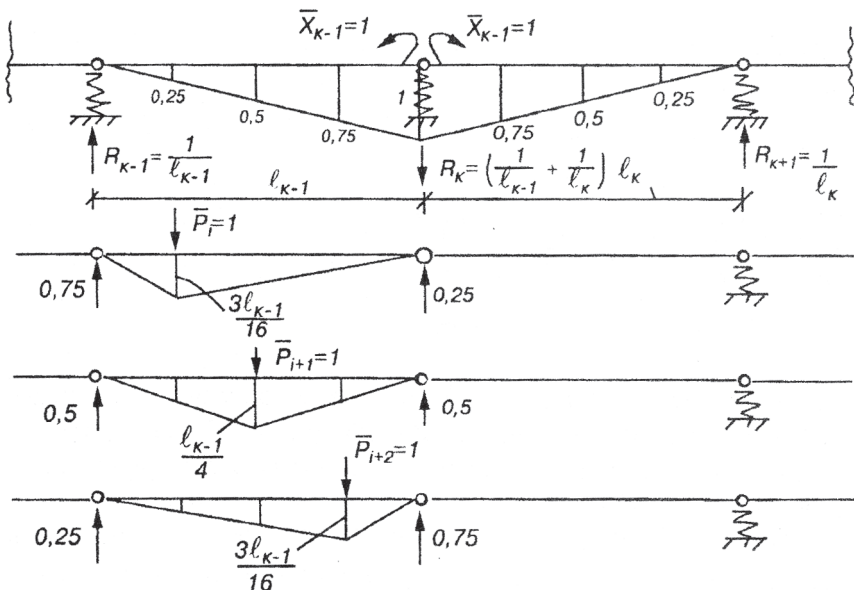


Рис. 44

$$\vec{S}_{P_i}^{0r} = \left[0 \quad \dots \quad 0 \quad \frac{3l_{K-1}}{16} \quad \frac{l_{K-1}}{8} \quad \frac{l_{K-1}}{16} \quad 0 \quad \dots \quad 0 \quad -0.75 \quad -0.25 \quad 0 \quad \dots \quad 0 \right]$$

Для вычисления вектора усилий в заданной статически неопределимой балке S_i , входящего в состав матрицы (3.20) воспользуемся алгоритмом, аналогичным (3.17)

$$\vec{S}_i = \vec{S}_{P_i}^{0r} - L_S^0 \cdot (L_S^{0r} \cdot B \cdot L_S^0)^{-1} \cdot L_S^0 \cdot B \cdot \vec{S}_{P_i}^{0r} \quad (3.21)$$

3.2.2. Программа для расчета неразрезных балок BALSET1.EXE

Процедура вычисления вектора изгибающих моментов в отмеченных сечениях и определения опорных реакций в упругих опорах статически неопределимой балки (3.21) составила алгоритм программы, находящейся в файле BALSET1.EXE и написанной на языке программирования Turbo Pascal 6.0. Для работы программы должны быть пред-

варительно заполнены файлы C:\INF\apr1.dat и C:\INF\apr2.dat, находящиеся в каталоге C:\INF.

Порядок работы с файлами описан в п. 1.3.

В программе предполагается, что балка слева направо разделена на участки, работающие на изгиб. Начало и конец двух соседних участков имеют один номер. Каждая консоль, если она есть, представляет один участок, а каждый пролет балки разделяется на четыре участка равной длины.

В файле APR1.DAT в режиме EDIT в первой строке записывается имя или фамилия студента латинскими буквами, а в последующих строках — транспонированные векторы S_i эпюр моментов и опорных реакций в основной системе метода сил от единичных изгибающих моментов $X_i = 1$, приложенных по направлениям отброшенных связей, воспринимающих момент над промежуточными опорами.

В файле APR2.DAT в режиме EDIT записывается по группам следующая информация:

1) массив коэффициентов i_k податливостей участков балки, работающих на изгиб, то есть массив числовых множителей перед матрицами податливости участков в форму-

ле (2.27). Для участка $i_k = \frac{\ell_k \cdot EJ_o}{6EJ_k}$, где l_k, EJ_k — длина и

жесткость сечения участка с номером k , а EJ_o — жесткость любого сечения балки, принимаемой за модульную. Дело в том, что, как указывалось выше, при вычислении усилий в статически неопределимой системе методом сил достаточно знать только относительные жесткости сечений;

2) массив коэффициентов i_k податливостей участков опорных стержней, работающих на растяжение или сжатие, $i_k = 0.5C_k \cdot EJ_o$, где C_k — податливость упругой опоры, равная деформации опорного стержня, моделирующего эту опору, от действия вертикальной силы $P=1$. Если опора жесткая, то $i_k = 0$.

3) массив номеров сечений балки, под которыми находятся опоры (слева направо);

4) массив длин консолей, если они есть, и пролетов (слева направо) $(d_1), l_1, l_2, \dots, l_{n+1}, (d_2)$.

При записи исходной информации в файлы каждую группу целесообразно начинать с новой строки. При этом следует быть внимательным: эти файлы имеют текстовый тип, поддерживаемый языком Pascal, и каждая запись числа должна отделяться одним пробелом, а первое число в строке пишется без предшествующего пробела.

После того, как файлы исходных данных подготовлены, запускается программа в файле BALSET1.EXE нажатием клавиши ENTER. Программа запрашивает о готовности исходной информации. Если файлы готовы, то нужно нажать клавишу Y, если нет, то N. При нажатии N программа выводит на экран структуру информации, записываемой в указанных файлах. После нажатия ENTER происходит возврат в окна Нортон.

Если нажат ответ Y, то программа запрашивает информацию о размерности в диалоговом режиме следующим образом:

степень статической неопределимости — в ответ вводится n ;
признак наличия консоли слева от первой опоры (да — 1, нет — 0);

признак наличия консоли справа от последней опоры (да — 1, нет — 0);

число участков, работающих на изгиб. — в ответ вводится число r ;

число опор многопролетной балки — в ответ вводится число por ;

номер левой опоры пролета, в котором нужно построить огибающую эпюру M (для этого пролета вычисляются ординаты линий влияния M в двух опорных сечениях и трех сечениях в пролете) — в ответ вводится соответствующее число i .

После работы программа открывает в каталоге C:\INF два файла результатов: файл c:\inf\...1.RES, в который вы-

водятся искомые векторы \vec{X}, \vec{S} при каждом загрузении единичной силой и файл c:\inf\...2.RES, в который выводятся ординаты пяти линий влияния моментов и линии влияния усилий во всех опорных стержнях. Вместо многоточия названия файлов будут содержать имя или фамилию студента, введенную ранее в первую строку файла APR1.DAT. Содержимое файлов-результатов можно распечатать, нажав функциональную клавишу F9 в режиме EDIT.

3.2.3. Пример расчета многопролетной балки на подвижную нагрузку

Балка опирается на 5 опор (рис. 45, а) и является 3 раза статически неопределимой системой $n=3K-III=3 \cdot 5-12=3$. В задании требуется построить огибающую эпюру моментов для пролета с номером $i=2$. На балку действует заданная постоянная нагрузка q_K, P_j и временная нагрузка в виде равномерно распределённой $q=10$ кН/м, могущая иметь разрывы по длине приложения (моделирует группы вагонов). В каждом сечении балки изгибающий момент будет равен сумме моментов, возникающих в этом сечении от каждого вида нагрузки (постоянной и временной)

$$M_i = M_i^{post} + M_i^{vr}. \quad (3.22)$$

Второе слагаемое может принимать различные значения в зависимости от положения временной нагрузки. Перед инженером стоит задача определить область значений изгибающего момента для каждого сечения, то есть найти M_i^{\min} и M_i^{\max} в алгебраическом смысле (для балки, как обычно, примем положительным момент, вызывающий растяжение в нижних волокнах). Если после вычислений отложить эти ординаты в соответствующую сторону и соединить кривыми линиями отдельно ординаты M_i^{\min} и отдельно ординаты M_i^{\max} , то получится фигура, которая называется огибающей эпюрой моментов. Имея такую эпюру, инженер может с уверенностью сказать, что при любом положении временной нагрузки величина изгибающего момента в данном се-

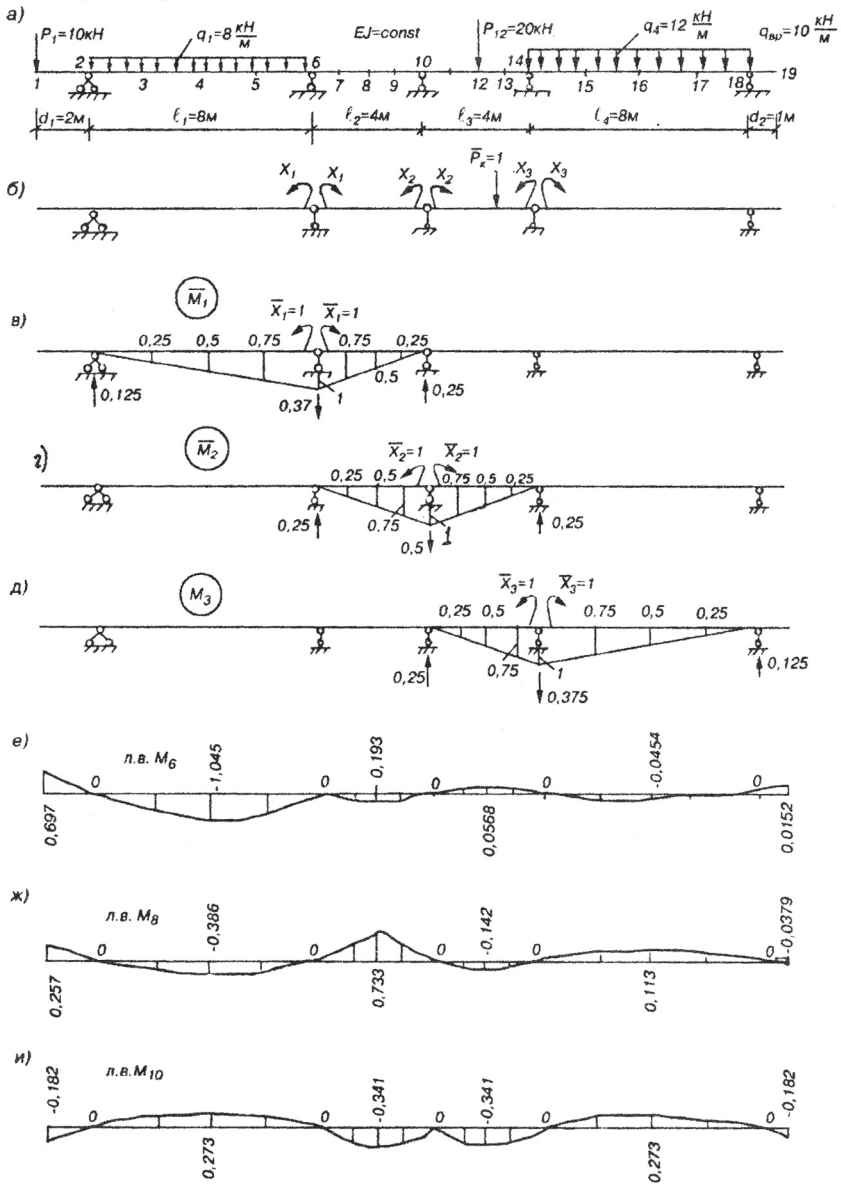


Рис. 45

чении не выйдет за пределы интервала, ограниченного огибающей.

В задании требуется построить огибающую только в пределах одного пролета ($i=2$), причем, для сокращения вычислений можно приближенно построить огибающую с помощью ординат моментов только в трех сечениях № 6, 8, 10.

Оба слагаемых в (3.22) определим с помощью линий влияния для M_i , где $i=6, 8, 10$.

Для построения линий влияния воспользуемся программой BALSET1.

Выберем основную систему (рис. 45, б), убрав связи, воспринимающие изгибающие моменты в сечениях над промежуточными опорами, и заменив их действие неизвестными опорными моментами X_1, X_2, X_3 . От каждого $X_i = 1$ построим эпюры M_i ($i=1, 2, 3$) и определим опорные реакции (рис. 45, в, г, д). Далее запишем исходную информацию в файл C:\INF\aprl.dat:

```
name
0 0 0.25 0.5 0.75 1 0.75 0.5 0.25 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
-0.125 0.25 -0.125 0 0
0 0 0 0 0 0 0.25 0.5 0.75 1 0.75 0.5 0.25 0 0 0 0 0 0
0 -0.25 0.5 -0.25 0
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0.25 0.5 0.75 1 0.75 0.5 0.25 0 0
0 0 -0.25 0.5 -0.25
```

Для большей наглядности каждый вектор \vec{S}_i разделен на две части: первая — ординаты эпюр моментов, вторая — значения усилий в опорных стержнях от $X_i = 1$. Каждая часть записана в отдельной строке.

Далее готовим массив податливостей участков балки, работающих на изгиб, по формуле $i_k = \frac{\ell_k \cdot EJ_a}{6EJ_k} = \frac{\ell_k}{6}$, так как рассматриваемая балка постоянного поперечного сечения.

Первый участок — консоль. $i_1 = 2/6 = 0.33333$.

Податливости участков первого пролёта:

$$i_2 = \dots = i_5 = \frac{8}{4 \cdot 6} = 0.33333.$$

Податливости участков второго пролёта:

$$i_6 = \dots = i_9 = \frac{4}{4 \cdot 6} = 0.16666.$$

Податливости участков третьего пролёта:

$$i_{10} = \dots = i_{13} = \frac{4}{4 \cdot 6} = 0.16666.$$

Податливости участков четвёртого пролёта:

$$i_{14} = \dots = i_{17} = \frac{8}{4 \cdot 6} = 0.33333.$$

Последний участок - консоль. $i_{18} = 1 \setminus 6 = 0.16666.$

Податливости жёстких опор раны 0.

Массив номеров сечений балки, под которыми находятся опоры 2,6,10,14,18.

Длины консолей и пролётов балки равны 2,8,4,4,8,1.

Записываем эту информацию в файл C:\INF\apr2.dat:

```
0.33333
0.33333 0.33333 0.33333 0.33333
0.16666 0.16666 0.16666 0.16666
0.16666 0.16666 0.16666 0.16666
0.33333 0.33333 0.33333 0.33333
0.16666
0 0 0 0 0
2 6 10 14 18
2 8 4 4 8 1.
```

Запускаем программу в файле BALSET1.EXE нажатием клавиши ENTER. Программа запрашивает о готовности исходной информации — отвечаем Y. Программа запрашивает информацию о размерности в диалоговом режиме следующим образом:

степень статической неопределимости — в ответ вводится 3;

признак наличия консоли слева от первой опоры (да — 1, нет — 0) — 1;

признак наличия консоли справа от последней опоры (да — 1, нет — 0) — 1;

число участков, работающих на изгиб, — в ответ вводится число 18;

число опор многопролетной балки — в ответ вводится число 5;

номер левой опоры пролета, в котором нужно построить огибающую эпюру M (для этого пролета вычисляются ординаты линий влияния M в двух опорных сечениях и трех сечениях в пролете) — в ответ вводится число 2.

После работы программа открывает в каталоге C:\INF два файла результатов:

файл c:\inf\name1.RES, в который выводятся искомые векторы X, S при каждом нагружении единичной силой и файл c:\inf\name2.RES, в который выводятся ординаты пяти линий влияния моментов и линии влияния усилий во всех опорных стержнях. В таблице приведены ординаты линий влияния моментов в сечениях № 6, 8 и 10, значения которых округлены до трех значащих цифр. Линии влияния моментов в этих сечениях показаны на рис. 45, *e*, *ж*, *и*. Можно доказать, что ординаты линии влияния какого-нибудь фактора с точностью до множителя совпадают с вертикальными составляющими перемещений точек проезжей части (в нашем случае — с ординатами упругой линии балки).

Рассмотрим два состояния нашей балки, где в сечении (в нашем случае 8), в котором строится линия влияния момента врезан полный шарнир (рис. 46). В первом состоянии показана упругая линия неразрезной балки от действия единичной силы. В этом состоянии в сечениях, бесконечно близких к врезанному шарниру приложены действительные изгибающие моменты X_8 . Во втором состоянии показана упругая линия балки с врезанным шарниром от действия двух моментов равных единице $X_8 = 1$. Перемещения точек оси балки в одном состоянии можно принять за возможные в другом состоянии. Применение к двум состояниям теореме о взаимности работ (2.37), получим

Таблица

№ точки	Л.в. M_6	Л.в. M_R	Л.в. M_{10}
1	0.697	0.257	- 0.182
2	0.000	0.000	0.000
3	- 0.653	- 0.214	0.170
4	- 1.045	- 0.386	0.273
5	- 0.915	- 0.338	0.238
6	0.000	0.000	0.000
7	- 0.186	0.309	- 0.196
8	- 0.193	0.733	- 0.341
9	- 0.104	0.290	- 0.315
10	0.000	0.000	0.000
11	0.0525	- 0.131	- 0.315
12	0.0568	- 0.142	- 0.341
13	0.0327	- 0.0817	- 0.196
14	0.000	0.000	0.000
15	- 0.0398	0.0994	0.238
16	- 0.0454	0.113	0.273
17	- 0.0284	0.0710	0.170
18	0.000	0.000	0.000
19	0.0152	- 0.0379	- 0.0909

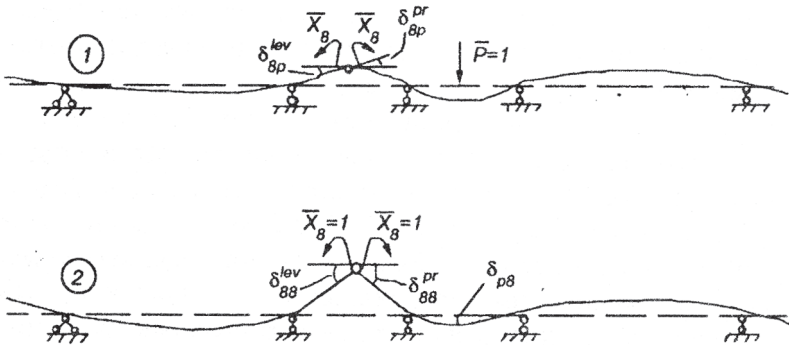


Рис. 46

$$A_{12} = A_{21}$$

$$X_8 \cdot (\delta_{88}^{lev} + \delta_{88}^{pr}) + \bar{P} \cdot \delta_{p8} = \bar{X}_8 \cdot \delta_{8p}^{lev} - \bar{X}_8 \cdot \delta_{8p}^{pr} = 0;$$

так как в неразрезной балке $\delta_{8p}^{lev} = \delta_{8p}^{pr}$.

Отсюда
$$X_8 = -\frac{1}{\delta_{88}} \cdot \delta_{p8}. \quad (3.23)$$

Второй сомножитель в (3.23) можно рассматривать как эпюру прогибов балки в системе с врезанным шарниром от действия двух моментов $X_8 = 1$, а X_8 — как ординаты линии влияния моментов в заданной балке в сечении 8.

Формула (3.23) выражает сущность кинематического метода построения линий влияния, который мы будем применять для визуальной проверки результатов, полученных с помощью программы BALSET1.EXE, и который заключается в следующем.

Для того, чтобы построить модель линии влияния какого-либо фактора, нужно в заданной системе отбросить связь, воспринимающую этот фактор, заменить её действие неизвестным усилием X , приложенным в положительном направлении и показать вид эпюры прогибов от действия этого фактора — эта эпюра с точностью до отрицательного множителя соответствует ординатам линии влияния усилия X .

Вычислив с помощью ПЭВМ ординаты линий влияния, можно приступить к определению моментов от конкретной нагрузки. Вспомним, что линией влияния какого-либо фактора (например, M) называется график, каждая ордината Y которого показывает величину этого фактора от действия единичной силы, стоящей над этой ординатой. Если вместо единичной силы над ординатой Y находится сила P , по величине отличающаяся от единицы, то предполагая справедливость закона Гука, можно записать

$$M = P \cdot Y$$

Если на систему действует несколько сосредоточенных сил, то в соответствии с принципом независимости действия сил момент в сечении, для которого построена линия влияния, можно определить по формуле (рис. 47, а)

$$M = \sum_i P_i \cdot y_i \quad (3.24)$$

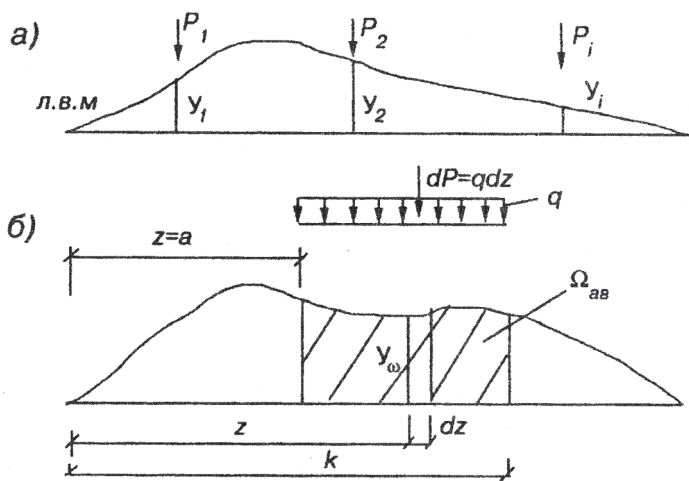


Рис. 47

Если на систему на каком-то участке (рис. 47, б) действует равномерно распределённая нагрузка, то представив её как бесконечное множество, сосредоточенных сил $dP = q \cdot dz$ и применив (3.24), но заменив сумму интегралом, получим

$$M = \int_a^b y(z) \cdot q \cdot dz = q \int_a^b y(z) \cdot dz = q \cdot \Omega_{ab} \quad (3.25)$$

где Ω_{ab} — площадь линии влияния на участке под равномерно распределённой нагрузкой q .

Вычислим площади линий влияния моментов (размерность площади — m^2) в каждом пролёте по формулам площадей трапеций:

$$\begin{aligned} \Omega_{1-2}^6 &= 0.5 \cdot 0.697 \cdot 2 = +0.697 \\ \text{левая консоль} \quad \Omega_{1-2}^8 &= 0.5 \cdot 0.258 \cdot 2 = +0.258 \\ \Omega_{1-2}^{10} &= 0.5 \cdot -0.182 \cdot 2 = -0.182 \end{aligned}$$

первый пролет

$$\begin{aligned} \Omega_{2-6}^6 &= \frac{l_1}{4} \sum_{k=3}^5 y_k^6 = 2 \cdot (-0.653 - 1.045 - 0.915) = -5.226 \\ \Omega_{2-6}^8 &= 2 \cdot (-0.241 - 0.386 - 0.338) = -1.93 \quad ; \\ \Omega_{2-6}^{10} &= 2 \cdot (0.170 + 0.273 + 0.238) = 1.362 \end{aligned}$$

второй пролет

$$\begin{aligned} \Omega_{6-10}^6 &= \frac{l_2}{4} \sum_{k=7}^9 y_k^6 = 1 \cdot (-0.186 - 0.193 - 0.104) = -0.483 \\ \Omega_{6-10}^8 &= 1 \cdot (0.309 + 0.733 + 0.290) = 1.332 \quad ; \\ \Omega_{6-10}^{10} &= 1 \cdot (-0.196 - 0.341 - 0.315) = -0.852 \end{aligned}$$

третий пролет

$$\begin{aligned} \Omega_{10-14}^6 &= \frac{l_3}{4} \sum_{k=11}^{13} y_k^6 = 1 \cdot (0.0526 + 0.0568 + 0.0327) = 0.1421 \\ \Omega_{10-14}^8 &= 1 \cdot (-0.131 - 0.142 - 0.0817) = -0.3547 \quad ; \\ \Omega_{10-14}^{10} &= 1 \cdot (-0.315 - 0.341 - 0.196) = -0.852 \end{aligned}$$

четвертый пролет

$$\begin{aligned} \Omega_{14-18}^6 &= \frac{l_4}{4} \sum_{k=15}^{17} y_k^6 = 2 \cdot (-0.0398 - 0.0454 - 0.0284) = -0.2272 \\ \Omega_{14-18}^8 &= 2 \cdot (0.0994 + 0.1136 + 0.0710) = 0.568 \quad ; \\ \Omega_{14-18}^{10} &= 2 \cdot (0.238 + 0.273 + 0.170) = 1.362 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Omega_{18-19}^6 &= 0.5 \cdot 0.0152 \cdot 1 = 0.0076 \\ \text{правая консоль} \quad \Omega_{18-19}^8 &= -0.5 \cdot 0.0379 \cdot 1 = -0.01895 \\ \Omega_{18-19}^{10} &= -0.5 \cdot 0.0909 \cdot 1 = -0.04545. \end{aligned}$$

Определяем изгибающие моменты в кНм от заданной постоянной нагрузки (рис. 45, а), используя (3.24) и (3.25).

$$\begin{aligned}
 M_6^{post} &= P_1 \cdot y_1^6 + P_{12} \cdot y_{12}^6 + q_1 \cdot \Omega_{2-6}^6 + q_4 \cdot \Omega_{14-18}^6 = \\
 &10 \cdot 0.697 + 20 \cdot 0.0568 - 8 \cdot 5.226 - 12 \cdot 0.2272 = -36.4284 \\
 M_8^{post} &= P_1 \cdot y_1^8 + P_{12} \cdot y_{12}^8 + q_1 \cdot \Omega_{2-6}^8 + q_4 \cdot \Omega_{14-18}^8 = \\
 &10 \cdot 0.258 - 20 \cdot 0.142 - 8 \cdot 1.93 + 12 \cdot 0.568 = -8.884 \\
 M_{10}^{post} &= P_1 \cdot y_1^{10} + P_{12} \cdot y_{12}^{10} + q_1 \cdot \Omega_{2-6}^{10} + q_4 \cdot \Omega_{14-18}^{10} = \\
 &10 \cdot (-0.182) - 20 \cdot 0.341 + 8 \cdot 1.362 + 12 \cdot 1.362 = 18.6
 \end{aligned}$$

Определяем изгибающие моменты M_{\min}^{vr} (в кНм) от временной нагрузки.

При вычислении M_{\min}^{6vr} нужно разместить временную равномерно распределённую нагрузку в пролетах с отрицательными ординатами — 1-ом, 2-ом и 4-ом.

При вычислении M_{\min}^{8vr} — в пролетах 1-ом, 3-ем и на правой консоли.

При вычислении M_{\min}^{10vr} — на консолях и во 2-ом и 3-ем пролетах.

Таким образом,

$$\begin{aligned}
 M_{\min}^{6vr} &= 10 \cdot (\Omega_{2-6}^6 + \Omega_{6-10}^6 + \Omega_{14-18}^6) = 10 \cdot (-5.226 - 0.483 - 0.2272) = -59362, \\
 M_{\min}^{8vr} &= 10 \cdot (\Omega_{2-6}^8 + \Omega_{10-14}^8 + \Omega_{18-19}^8) = 10 \cdot (-1.93 - 0.3547 - 0.01895) = -230365, \\
 M_{\min}^{10vr} &= 10 \cdot (\Omega_{-2}^{10} + \Omega_{6-10}^{10} + \Omega_{10-14}^{10} + \Omega_{18-19}^{10}) = 10 \cdot (-0.182 - 0.8522 - 0.04545) = -19314.
 \end{aligned}$$

Определяем изгибающие моменты M_{\max}^{vr} (в кНм) от временной нагрузки.

При вычислении M_{\max}^{6vr} нужно разместить временную равномерно распределённую нагрузку на консолях и в пролете 3 с положительными ординатами.

При вычислении M_{\max}^{8vr} — на левой консоли и во 2-ом и 4-ом пролетах.

При вычислении M_{\max}^{10vr} — в 1-ом и 4-ом пролетах.

Таким образом,

$$\begin{aligned}
 M_{\max}^{6vr} &= 10 \cdot (\Omega_{1-2}^6 + \Omega_{10-14}^6 + \Omega_{18-19}^6) = 10 \cdot (0.697 + 0.1421 + 0.0076) = 8.467, \\
 M_{\max}^{8vr} &= 10 \cdot (\Omega_{1-2}^8 + \Omega_{6-10}^8 + \Omega_{14-18}^8) = 10 \cdot (0.258 + 1.332 + 0.568) = 21.58, \\
 M_{\max}^{10vr} &= 10 \cdot (\Omega_{2-6}^{10} + \Omega_{14-18}^{10}) = 10 \cdot (1.362 + 1.362) = 27.24.
 \end{aligned}$$

Вычисляем ординаты линий огибающей эпюры (в кНм).

Линия, соединяющая минимальные (в алгебраическом смысле) ординаты:

$$\begin{aligned}
 M_{\min}^6 &= M_6^{post} + M_{\min}^{6vr} = -36.428 - 59.362 = -95.79, \\
 M_{\min}^8 &= M_8^{post} + M_{\min}^{8vr} = -8.884 - 23.0365 = -31.9205, \\
 M_{\min}^{10} &= M_{10}^{post} + M_{\min}^{10vr} = 18.6 - 19.3145 = -0.7145.
 \end{aligned}$$

Линия, соединяющая максимальные (в алгебраическом смысле) ординаты:

$$\begin{aligned}
 M_{\max}^6 &= M_6^{post} + M_{\max}^{6vr} = -36.428 + 8.467 = -27.961, \\
 M_{\max}^8 &= M_8^{post} + M_{\max}^{8vr} = -8.884 + 21.58 = 12.696, \\
 M_{\max}^{10} &= M_{10}^{post} + M_{\max}^{10vr} = 18.6 + 27.24 = 45.84.
 \end{aligned}$$

Для постоянной нагрузки (рис. 48, а) огибающая эпюра моментов во втором пролете показана на рис. 48, б.

Интересно проследить, как влияет постоянная часть нагрузки на ординаты огибающей эпюры моментов в той же балке (рис. 48, б). Значения моментов от временной нагрузки остаются те же. Для вычисления моментов от постоянной нагрузки загружаем соответствующие линии влияния новой нагрузкой по формулам (3.24), (3.25).

$$\begin{aligned}
 M_6^{post} &= q \cdot \sum \Omega^6 + P_8 \cdot y_8^6 = \\
 &= 8 \cdot (0.697 - 5.226 - 0.483 + 0.1421 - 0.2272 + 0.0076) - 100 \cdot 0.193 = -60.016; \\
 M_8^{post} &= q \cdot \sum \Omega^8 + P_8 \cdot y_8^8 = \\
 &= 8 \cdot (0.258 - 1.93 + 1.332 - 0.3547 + 0.568 - 0.01895) + 0.733 \cdot 100 = 72.1648; \\
 M_{10}^{post} &= q \cdot \sum \Omega^{10} + P_8 \cdot y_8^{10} = \\
 &= 8 \cdot (-0.182 + 1.362 - 0.852 - 0.852 + 1.362 - 0.04545) - 100 \cdot 0.341 = -27.7596.
 \end{aligned}$$

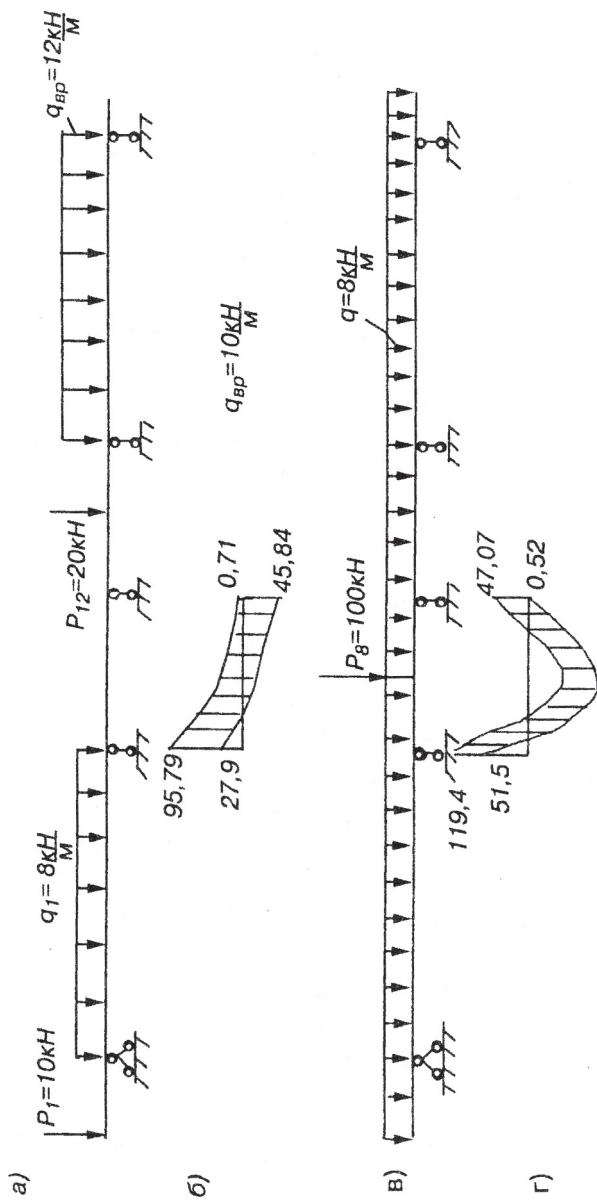


Рис. 48

Вычисляем ординаты линий огибающей эпюры (кНм).

Линия, соединяющая минимальные (в алгебраическом смысле) ординаты:

$$M_{\min}^6 = M_6^{post} + M_{\min}^{6vr} = -60.016 - 59.362 = -119.378 \text{ ,}$$

$$M_{\min}^8 = M_8^{post} + M_{\min}^{8vr} = 72.1648 - 23.0365 = 49.1283 \text{ ,}$$

$$M_{\min}^{10} = M_{10}^{post} + M_{\min}^{10vr} = -27.7596 - 19.3145 = -47.0741 \text{ .}$$

Линия, соединяющая максимальные (в алгебраическом смысле) ординаты:

$$M_{\max}^6 = M_6^{post} + M_{\max}^{6vr} = -60.016 + 8.467 = -51.549 \text{ ,}$$

$$M_{\max}^8 = M_8^{post} + M_{\max}^{8vr} = 72.1648 + 21.58 = 93.7448 \text{ ,}$$

$$M_{\max}^{10} = M_{10}^{post} + M_{\max}^{10vr} = -27.7596 + 27.24 = -0.5196 \text{ .}$$

Для постоянной нагрузки (рис. 48, в) огибающая эпюра моментов во втором пролете показана на рис. 48, г.

3.3. Расчет однопролетных статически неопределимых балок

В этом параграфе мы будем рассматривать однопролетные балки двух типов (рис. 49). В балке II типа справа опорное закрепление представляет собой жесткое защемление, но с возможностью горизонтальной подвижки. В дальнейшем возможность этого смещения будет подразумеваться, поэтому мы будем пользоваться вторым вариантом изображения балки II типа.

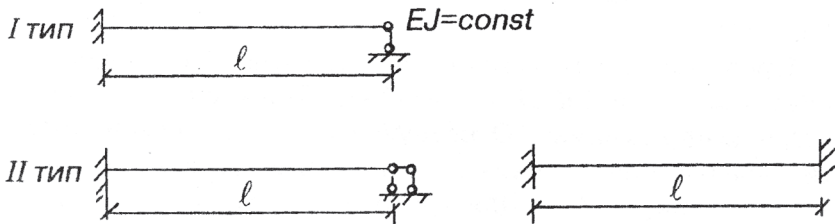


Рис. 49

Отметим важную особенность балок обоих типов: от смещения опор в них появляются напряжения даже при отсутствии внешней нагрузки. На рис. 50, *а* показана статически определимая балка, а на рис. 50, *б* — статически неопределимая при малом (по сравнению с пролетом) смещении правой опоры. Статически определимая балка поворачивается на малый угол, оставаясь прямой — изгибающий момент равен нулю (рис. 50, *а*). Статически неопределимая балка изгибается при смещении опоры, следовательно, по-

является изгибающий момент $M = \frac{EJ}{\rho} \neq 0$ даже при отсутствии нагрузки. Этот момент связан с нормальными напряжениями в сечениях балки, которые могут добавляться к напряжениям от нагрузки. Поэтому, обычно, в статически неопределимых системах предъявляют повышенные требования к качеству основания для опор.

В примерах, рассмотренных ниже, смещение опор любого вида (линейное или угловое) будет обозначаться Z .

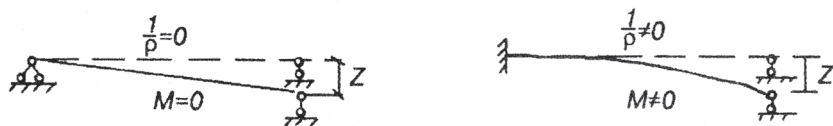


Рис. 50

ПРИМЕР 1

Балка I типа с линейным смещением Z правой опоры (рис. 51).

Проведем расчет методом сил. Степень статической неопределимости $n = 3K - III = 3 \cdot 1 - 2 = 1$. Балка один раз статически неопределимая. Основную систему выбираем, отбросив правую опорную связь и заменив её действие неизвестным усилием X_1 . Для основной системы составляем уравнение деформации

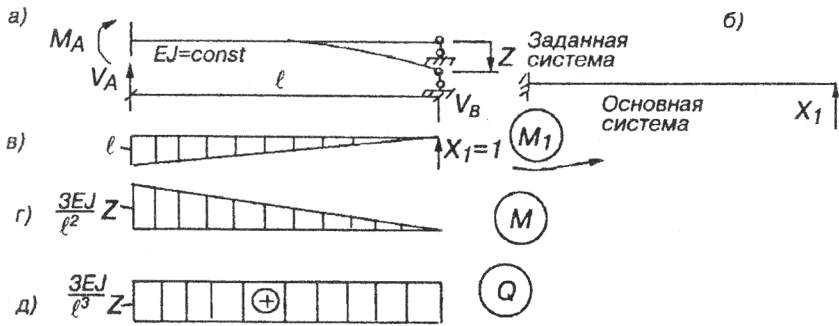


Рис. 51

$$\delta_{11} \cdot X_1 = -Z.$$

Здесь буквально записано, что перемещение по направлению силы X_1 равно заданному, направленному вниз. Далее определяем коэффициент δ_{11} по формуле Мора, перемножая эпюру \bar{M}_1 от $\bar{X}_1 = 1$ саму на себя

$$\delta_{11} = \sum \int \frac{\bar{M}_1 \bar{M}_1 dS}{EJ} = \frac{l^3}{3EJ}. \quad \text{Решая уравнение, получим}$$

$$X_1 = -\frac{3EJ}{l^3} Z.$$

Ординаты окончательной эпюры моментов вычисляем по формуле $M = \bar{M}_1 \cdot X_1$ (рис. 51, г). В сечении у заделки $M = -\frac{3EJ}{l^2} Z$. Значения поперечной силы в сечениях балки определяем по формуле $Q = \frac{dM}{dS} = \frac{3EJ}{l^3} Z$. Во всех сечениях $Q = \text{const}$ (рис. 51, д). Таким образом,

$$V_A = \frac{3EJ}{l^3} Z; \quad V_B = -\frac{3EJ}{l^3} Z.$$

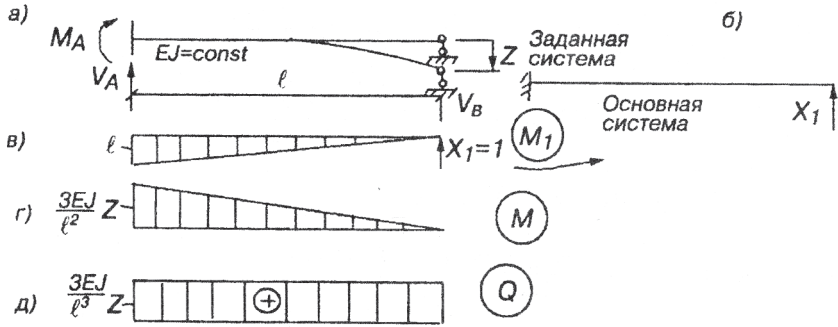


Рис. 51

ПРИМЕР 2

Балка I типа с поворотом левой опоры на угол Z (рис. 52, а). Основную систему выбираем, убрав связь, воспринимающую изгибающий момент, и заменив её действие неизвестным X_1 — получилась шарнирно опёртая балка (рис. 52, б). Для основной системы составляем уравнение деформации

$$\delta_{11} \cdot X_1 = Z.$$

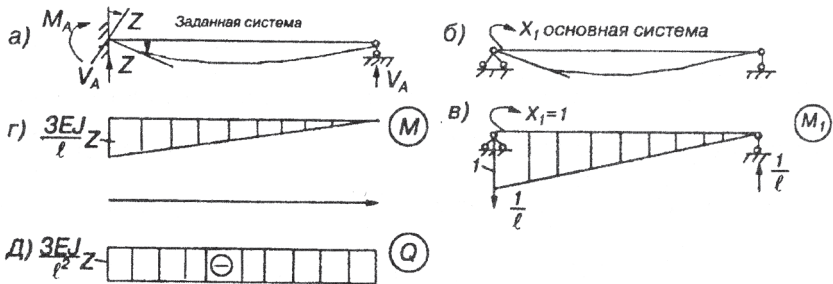


Рис. 52

Здесь буквально записано, что угол поворота по направлению силы X_1 равен заданному, направленному так же по часовой стрелке. Далее определяем коэффициент δ_{11} по формуле Мора, перемножая эпюру \bar{M}_1 от $\bar{X}_1=1$ саму на себя $\delta_{11} = \sum \int \frac{\bar{M}_1 \bar{M}_1 dS}{EJ} = \frac{l}{3EJ}$. Решая уравнение, получим $X_1 = \frac{3EJ}{l} Z$.

Ординаты окончательной эпюры моментов вычисляем по формуле $M = \bar{M}_1 \cdot X_1$ (рис. 52, з). В сечении у заделки $M = \frac{3EJ}{l} Z$. Значения поперечной силы в сечениях балки определяем по формуле $Q = \frac{dM}{ds} = -\frac{3EJ}{l^2} Z$. Во всех сечениях $Q = \text{const}$ (рис. 52, д). Таким образом, $V_A = -\frac{3EJ}{l^2} Z$; $V_B = \frac{3EJ}{l^2} Z$.

ПРИМЕР 3

Балка I типа под действием равномерно распределённой нагрузки (рис. 53, а).

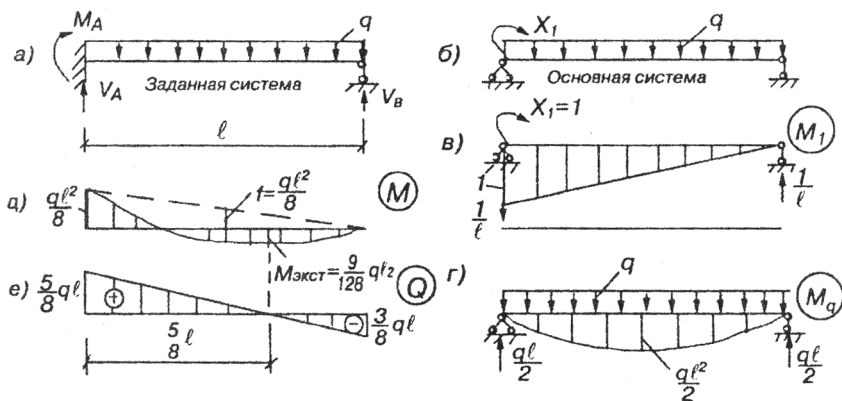


Рис. 53

Основная система — та же, что в примере 2, но с равномерно распределённой нагрузкой.

Каноническое уравнение метода сил

$$\delta_{11} \cdot X_1 + \Delta_{1q} = 0;$$

$$\delta_{11} = \sum \int \frac{\overline{M}_1 \overline{M}_1 dS}{EJ} = \frac{l}{3EJ};$$

$$\Delta_{1q} = \sum \int \frac{\overline{M}_1 M_q dS}{EJ} = \frac{2 \cdot q \cdot l^2 \cdot l \cdot 0.5}{EJ \cdot 3 \cdot 8} = \frac{ql^3}{24EJ};$$

$$X_1 = -\frac{\Delta_{1q}}{\delta_{11}} = -\frac{ql^2}{8}.$$

Отметим, что EJ поперечного сечения балки при решении сокращается.

Момент в заделке равен $M = -\frac{ql^2}{8}$. Для вычисления Q рассмотрим балку без опорных связей (рис. 54)

и составим уравнения равновесия

$$\sum m_B = 0; \quad \frac{ql^2}{8} + \frac{ql^2}{2} - Q_A \cdot l = 0; \quad Q_A = \frac{5}{8}ql;$$

$$\sum m_A = 0; \quad \frac{ql^2}{8} - \frac{ql^2}{2} - Q_B \cdot l = 0; \quad Q_B = -\frac{3}{8}ql.$$

Эпюра Q показана на рис. 53, *e*. В произвольном сечении

$$Q(z) = \frac{5}{8}ql - q \cdot z.$$

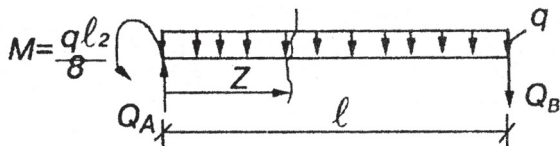


Рис. 54

Там, где эюра Q пересекает ось, эюра моментов имеет экстремум:

$$Q(z) = \frac{dM}{dz} = \frac{5}{8}ql - q \cdot z_0 = 0; \quad z_0 = \frac{5}{8}ql.$$

$$M_{EXT} = -ql^2 / 8 + (5ql / 8) \cdot z_0 - qz_0^2 / 2 = \frac{9}{128}ql^2.$$

Реакции равны $V_A = \frac{5}{8}ql$; $V_B = \frac{3}{8}ql$.

ПРИМЕР 4

Балка I типа под действием сосредоточенной силы P в середине пролёта (рис. 55, а). Основная система — та же, что и в двух последних примерах, но с силой посредине (рис. 55, б).

Каноническое уравнение метода сил: $\delta_{11} \cdot X_1 + \Delta_{1P} = 0$.

$$\Delta_{1P} = \sum \int \frac{\bar{M}_1 M_P dS}{EJ} = \frac{1}{EJ} \left[\frac{Pl}{4} \cdot \frac{l}{2 \cdot 2} \left(\frac{1}{3} \cdot 1 + \frac{2}{3} \cdot 0.5 + \frac{2}{3} \cdot 0.5 \right) \right] = \frac{Pl^2}{16EJ};$$

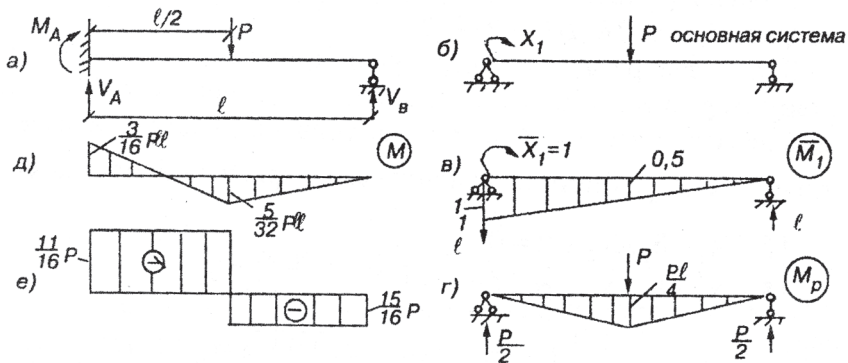


Рис. 55

$$X_1 = -\frac{Pl^2 \cdot 3}{16 \cdot l} = -\frac{3}{16} Pl.$$

Момент в заделке $M_A = -\frac{3}{16} Pl$. Момент под силой P .

$M_C = 0.5 \cdot (-\frac{3}{16} Pl) + \frac{Pl}{4} = \frac{5}{32} Pl$. Строим эпюру Q по участкам:

участок AC
$$Q_{AC} = \frac{\frac{3}{16} Pl + \frac{5}{32} Pl}{\frac{l}{2}} = \frac{11}{16} P;$$

участок CB
$$Q_{CB} = -\frac{5 \cdot Pl \cdot 2}{32 \cdot l} = -\frac{5}{16} P.$$

Таким образом, $V_A = \frac{11}{16} P; V_B = \frac{5}{16} P.$

ПРИМЕР 5

Балка II типа при смещении правой опоры на величину Z (рис. 56, а).

Степень статической неопределимости (левая схема на рис. 49) $n = 3K - III = 3 \cdot 2 - 4 = 2$.

Балка два раза статически неопределима. Основную систему образуем, убрав связи, воспринимающие изгибающие моменты в сечениях A и B и заменив их действие неизвестными X_1, X_2 . Система канонических уравнений метода сил

$$\begin{cases} \delta_{11} X_1 + \delta_{12} X_2 + \alpha = 0; \\ \delta_{21} X_1 + \delta_{22} X_2 - \alpha = 0; \end{cases} \quad \text{где } \alpha \approx \operatorname{tg} \alpha = \frac{Z}{l}.$$

$$\delta_{11} = \frac{l}{3EJ}; \quad \delta_{22} = \frac{l}{3EJ}; \quad \delta_{12} = \delta_{21} = \sum \int \frac{\bar{M}_1 \bar{M}_2 dS}{EJ} = \frac{1}{EJ} \frac{1 \cdot 1}{2} \frac{1}{3} = \frac{l}{6EJ}.$$

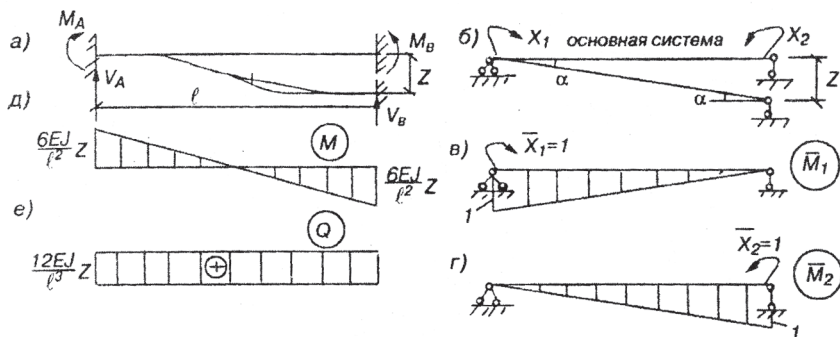


Рис. 56

Итак, система уравнений имеет вид:

$$\begin{cases} 2l \cdot X_1 + l \cdot X_2 = -6Z \frac{EJ}{l}; \\ l \cdot X_1 + 2l \cdot X_2 = +6Z \frac{EJ}{l}. \end{cases}$$

Решив эту систему, получим $X_1 = -\frac{6EJ}{l^2} Z$; $X_2 = \frac{6EJ}{l^2} Z$.

Ординаты эпюры моментов определяем по формуле $M = \bar{M}_1 \cdot X_1 + \bar{M}_2 \cdot X_2$.

Моменты в сечениях у заделок A и B равны

$$M_A = -\frac{6EJ}{l^2} Z; M_B = \frac{6EJ}{l^2} Z.$$

Эпюра моментов показана на рис. 56, д, а поперечных сил — на рис. 56, е.

$$\text{Таким образом, } V_A = \frac{12EJ}{l^3} Z; V_B = -\frac{12EJ}{l^3} Z.$$

Заметим, что для решения этой задачи можно было применить результат, полученный в примере 1. По виду упругой линии балки (рис. 57, а) можно сделать вывод, что знак кривизны меняется посередине пролёта, то есть в этом месте

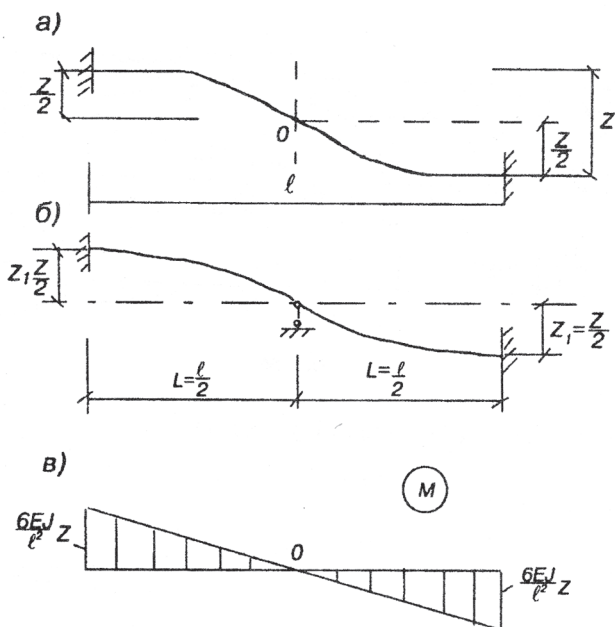


Рис. 57

изгибающий момент равен нулю (как бы образуется шарнир). Если начало координат принять в середине пролёта в точке на упругой линии (рис. 57, а) и считать, что опоры слева и справа перемещаются на величину $Z/2$, то в начале координат мы вправе поставить опорную связь (рис. 57, б). Теперь можно построить эпюры изгибающих моментов в двух балках I типа, используя результаты примера 1. Моменты в заделках по модулю будут равны

$$M = \frac{3EJ}{L^2} Z_1 = \frac{3EJ \cdot 4 \cdot Z}{l^2 \cdot 2} = \frac{6EJ}{l^2} Z.$$

Эпюры моментов в двух балках (рис. 57, в) составляют эпюру в заданной балке, которая совпадает с эпюрой, полученной в результате полного расчета.

ПРИМЕР 6

Балка II типа при повороте левой заделки на угол Z (рис. 58, а).

Основная система (рис. 58, б) и коэффициенты при неизвестных те же, что и в примере 5. Система уравнений деформации имеет вид

$$\begin{cases} \delta_{11} \cdot X_1 + \delta_{12} \cdot X_2 = Z; \\ \delta_{12} \cdot X_1 + \delta_{22} \cdot X_2 = 0. \end{cases}$$

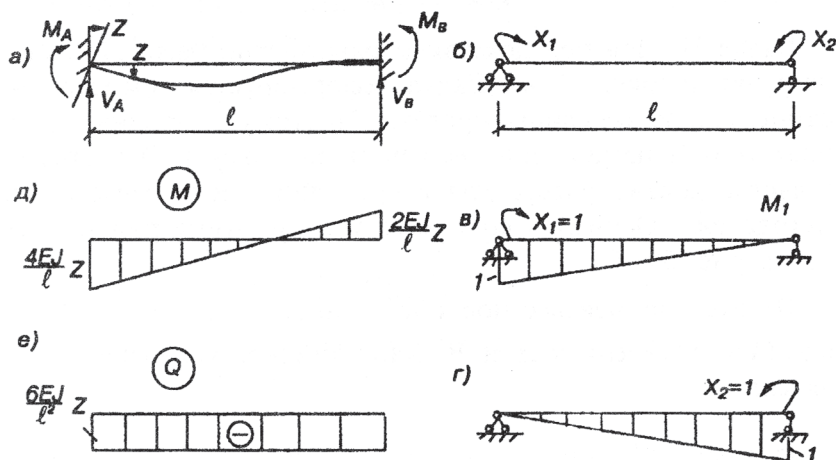


Рис. 58

Здесь первое уравнение выражает то обстоятельство, что поворот сечения по направлению равен Z , второе, что поворот по направлению равен 0.

Таким образом,
$$\begin{cases} 2l \cdot X_1 + l \cdot X_2 = 6Z \cdot EJ; \\ l \cdot X_1 + 2l \cdot X_2 = 0. \end{cases}$$

Решив эту систему, получаем $X_1 = \frac{4EJ}{l} Z$; $X_2 = -\frac{2EJ}{l} Z$.

Момент в сечении у заделки A $M_A = \frac{4EJ}{l}Z.$

Момент в сечении у заделки B $M_B = -\frac{2EJ}{l}Z.$

Эпюра моментов показана на рис. 58, d , а эпюра поперечных сил — на рис. 58, e .

ПРИМЕР 7

Балка II типа под действием равномерно распределённой нагрузки q (рис. 59, a). Балка деформируется симметрично относительно середины пролёта. Поэтому в опорных сечениях A и B изгибающие моменты одинаковы. Это обстоятельство можно учесть для сокращения числа неизвестных метода сил. Основная система с учётом симметрии показана на рис. 59, b .

Примем за неизвестное обобщённое неизвестное X_1 — моменты в сечениях A и B . Каноническое уравнение метода сил

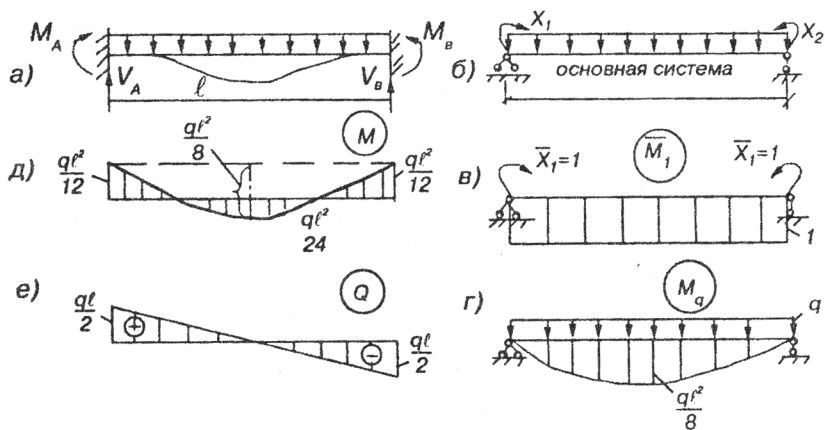


Рис. 59

$$\delta_{11} \cdot X_1 + \Delta_{1q} = 0;$$

$$\delta_{11} = \sum \int \frac{\overline{M}_1 M_1 dS}{EJ} = \frac{l}{EJ};$$

$$\Delta_{1q} = \sum \int \frac{\overline{M}_1 M_q dS}{EJ} = \frac{2 \cdot q \cdot l^2 \cdot l \cdot 1}{EJ \cdot 3 \cdot 8} = \frac{ql^3}{12EJ};$$

$$X_1 = -\frac{\Delta_{1q}}{\delta_{11}} = -\frac{ql^2}{12}.$$

Ординаты эпюры изгибающих моментов (рис. 59, д) определяем по формуле:

$$M = \overline{M}_1 \cdot X_1 + M_q.$$

Таким образом, $M_A = M_B = -\frac{ql^2}{12}$; $V_A = V_B = \frac{ql}{2}$.

ПРИМЕР 8

Балка II типа под действием сосредоточенной силы P в середине пролёта (рис. 60, а).

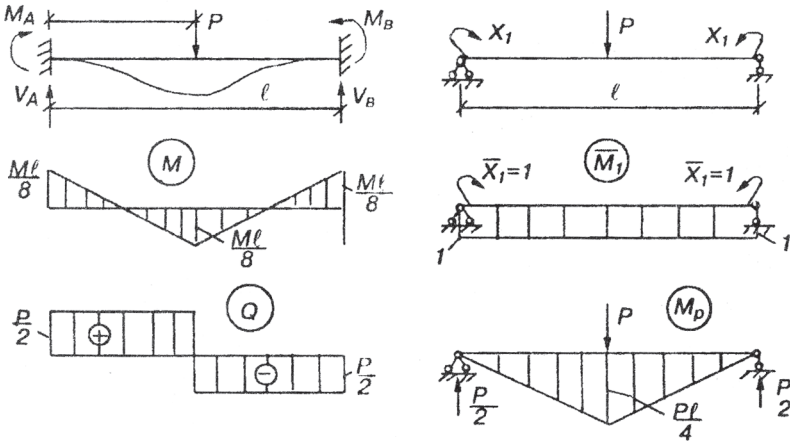


Рис. 60

Основная система та же, что и в предыдущем примере.
Каноническое уравнение метода сил $\delta_{11} \cdot X_1 + \Delta_{1P} = 0$.

$$\Delta_{1P} = \sum \int \frac{\overline{M}_1 M_P dS}{EJ} = \frac{1}{EJ} \frac{Pl \cdot l \cdot 1 \cdot 1}{4 \cdot 2 \cdot 2} \cdot 2 = \frac{Pl^2}{8EJ};$$

$$X_1 = -\frac{Pl^2}{8 \cdot l} = -\frac{1}{8} Pl.$$

Ординаты эпюры изгибающих моментов (рис. 60, д) определяем по формуле $M = \overline{M}_1 \cdot X_1 + M_P$.

$$\text{Таким образом, } M_A = M_B = -\frac{Pl}{8}; \quad V_A = V_B = \frac{P}{2}.$$

Результаты, полученные в примерах 1–8, будут использованы при изложении второго основного метода расчета статически неопределимых систем.

4. РАСЧЕТ СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМЫХ СТЕРЖНЕВЫХ СИСТЕМ С ПОМОЩЬЮ ПЭВМ МЕТОДОМ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ

4.1. Метод перемещений для расчета плоских стержневых систем

4.1.1. Степень кинематической неопределимости. Основная система

Сущность метода перемещений покажем на примере расчета рамы (рис. 61, а). Рядом с заданной рамой покажем набор статически неопределимых балок с длинами и нагрузками, соответствующими стержням рамы, но опирающихся на жесткие опоры (рис. 61, б).

Если пренебречь продольными деформациями, то любая рама может быть представлена набором однопролётных статически неопределимых балок двух типов I и II, расчёт которых на стандартную нагрузку уже известен (п. 3.3).

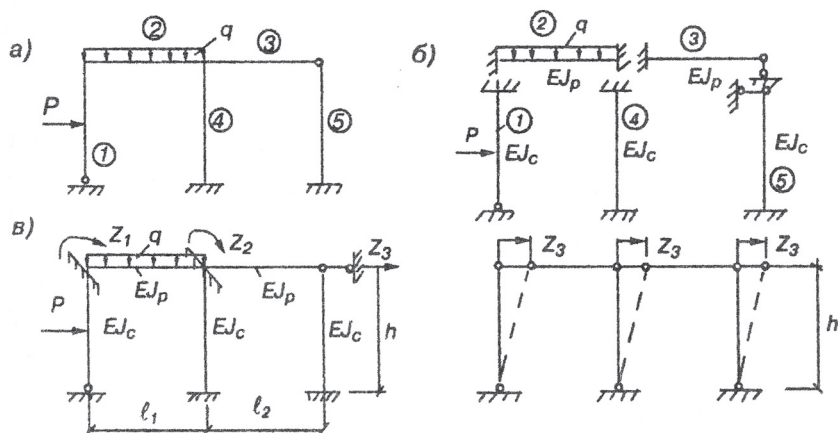


Рис. 61

Балки 1, 3, 5 соответствуют I типу, а балки 2, 4 — II типу. Отличие работы балок (рис. 61, б) от стержней в составе рамы (рис. 61, а) состоит в том, что в составе рамы на напряжённое состояние стержней помимо внешней нагрузки оказывают влияние перемещения их крайних сечений, возникающие из-за перемещений узлов при деформации рамы. Например, стержень 1 в составе рамы испытывает изгиб не только от силы P , как и балка 1 на рис. 61, б, но и от поворота узла A , и перемещения этого узла по горизонтали, то есть смещения верхней опоры балки 1 (рис. 61, б) относительно нижней опоры. На балку 4 (рис. 61, б) вообще не действует нагрузка, а стержень 4 испытывает изгиб от поворота узла B , и смещения его по горизонтали.

Поэтому, если мы будем знать величину этих перемещений, которые в дальнейшем обозначаются Z_i , то окончательные значения внутренних силовых факторов в раме можно будет определять в наборе балок I и II типа, которые будут изогнуты не только от действия внешней нагрузкой, но и от перемещений Z_i их опор. В дальнейшем перемещения предполагаются малыми по сравнению с размерами рамы — поэтому применим принцип независимости действия сил.

Обычно балки в наборе рисуются с общими опорными связями, образуя основную систему метода перемещений (рис. 61, в). При этом в жестких узлах показываются общие для соединяемых балок так называемые плавающие заделки — они препятствуют поворотам, но не препятствуют линейному смещению узлов в плоскости. Кроме того, по направлению линейных смещений узлов устанавливаются опорные стержни (например, верхний стержень в балке 5) (рис. 61, б).

Таким образом, можно считать, что основная система метода перемещений образуется введением связей двух типов: препятствующих поворотам жестких узлов (кроме опорных) и препятствующих линейным смещениям узлов. При этом, если не учитываются осевые деформации стерж-

ней, то последние смещения могут быть общими для группы узлов (например, для всех узлов ригеля (рис. 61, в). В заданной раме по направлению введённых связей имеют место перемещения соответственно двух типов — углы поворота плавающих заделок и линейные перемещения точек, где введены опорные стержни.

Общее минимальное число этих перемещений называется степенью кинематической неопределимости, обозначаемое n_z . Слово “минимальное” введено с умыслом: число балок I и II типа можно увеличить, деля раму на большее число стержней (устанавливая промежуточные узлы), чем это минимально необходимо. В дальнейшем таким приёмом мы пользоваться не будем. Теперь можно записать

$$n_z = n_y + n_l, \quad (4.1)$$

где n_y — число углов поворота;

n_l — число линейных перемещений.

Число углов поворота n_y определяется, как доказано выше, числом жёстких узлов рамы (кроме опорных). Для рамы (рис. 61) $n_y = 2$.

Число линейных перемещений определяется следующим образом. Во все узлы рамы, включая и опорные, устанавливаются полные шарниры, и для полученной системы подсчитывается степень подвижности по формуле

$$W = 2 \cdot Y - C. \quad (4.2)$$

Эта формула получена из следующих рассуждений: каждый узел на плоскости имеет две степени свободы (его положение определяется двумя координатами), а каждый опорный стержень снимает подвижность узла на единицу (по направлению стержня).

Если узел прикрепляется двумя стержнями, то по (4.2) $W=0$ и можно сделать, в общем случае, ложный вывод о неподвижности узла. Равенство нулю необходимый для неизменяемости (невозможности получать перемещения без возникновения напряжений), но недостаточно — два стержня могут быть поставлены неправильно. Для того, чтобы

исключить подвижность узла, две связи должны не лежать на одной прямой. Если угол между опорными стержнями составляет 180° градусов, то такая система называется мгновенно изменяемой. При этом $W=0$, но узел может перемещаться перпендикулярно направлению стержней.

Итак, если $W>0$ при подсчёте n_l могут встретиться два случая:

1) имеющиеся связи поставлены верно, но их недостаточно для неизменяемости системы, то $n_l=W$;

2) в одной части системы связи поставлены верно, но их недостаточно, а в другой — их достаточно, но они поставлены неверно, образуя мгновенно изменяемую систему. В этом случае $n_l=W+n_u$, где n_u — дополнительное число связей, исключающих мгновенную изменяемость.

При $W \leq 0$, если связи поставлены верно, то $n_l=0$; если в какой-либо части образуется мгновенно изменяемая система, то $n_l=n_u$.

Например, для рамы (рис. 61, а) при определении n_l получим систему (рис. 61, г).

Число изолированных узлов $Y=3$. Число связей, за которые принимаются любые стержни с шарнирами по концам, равно $C=5$. Степень подвижности $W=2Y-C=2 \cdot 3-5=1$. Все верхние узлы могут переместиться по горизонтали на одну и ту же величину. Поэтому $n_l=1$ и по направлению ригеля устанавливаем горизонтальный опорный стержень (рис. 61, в). Таким образом, для рамы (рис. 61, а) получаем, что степень кинематической неопределимости $n_z=n_y+n_l=2+1=3$. Основная система показана на рис. 61, в. Неизвестные метода перемещений обозначены Z_1, Z_2, Z_3 . Из них первые два — угловые в радианах, а третье — линейное в метрах.

Отметим, что по методу перемещений наша рама содержит три неизвестных, а по методу сил — 4: $n=3K-III=3 \cdot 2-2=4$.

В некоторых случаях число неизвестных по обоим методам ещё более различно. Например, для рамы (рис. 62, а) по методу сил $n=3K-III=3 \cdot t-2-2(t-1)=t$, а по методу перемещений при любом числе пролётов $n_z=n_l=1$ — горизонтальное

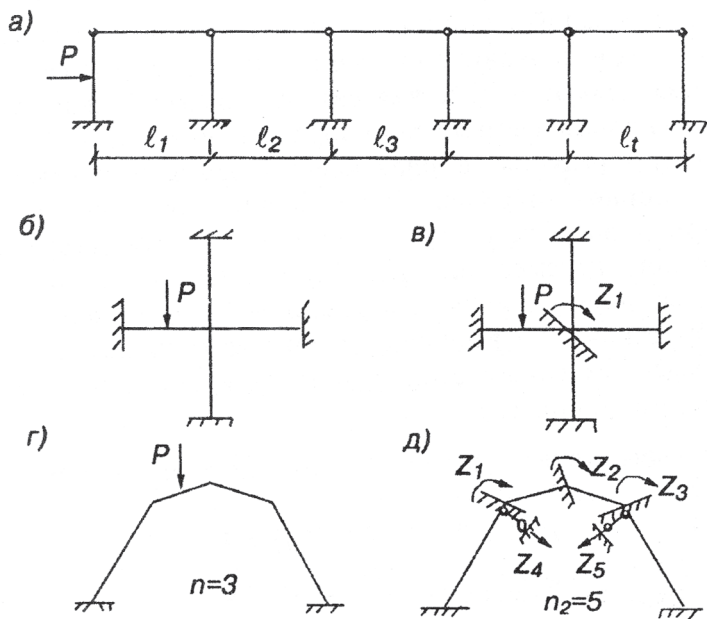


Рис. 62

перемещение ригеля. Для рамы (рис. 62, б) по методу сил $n=3 \cdot 3=9$, а по методу перемещений $n_z = n_y = 1$ (рис. 62, в). Но наряду с этими можно сказать системы, для которых по методу сил число неизвестных значительно меньше (рис. 62, г и д). Если число панелей у арочной схемы увеличить, то степень статической неопределимости не изменится $n=3$, а степень кинематической может стать значительно больше. Поэтому каждый раз при выборе метода следует сравнить число неизвестных и выбрать метод с их меньшим количеством. Более того, метод перемещений можно применять и для расчёта статически определимых систем.

4.1.2. Система канонических уравнений метода перемещений

Для определения перемещений Z_i составляются дополнительные уравнения из условий, что напряжённое состояние в основной системе должно быть таким же, как и в заданной

системе. В каждой однопролётной балке — элементе основной системы возникают опорные реакции, которые по принципу независимости действия сил, складываясь, дают реакцию в основной системе по направлению введённой связи (моментную реакцию в плавающей заделке и реактивную силу в опорном стержне). Эти реакции обозначим R_i , где i — номер введённой связи или номер соответствующего неизвестного перемещения Z_i . Для совпадения усилий в основной системе с усилиями в заданной, перемещения должны быть такими по величине, чтобы реакции по направлению введённых связей были равны нулю, так как в заданной системе таких связей нет.

Рассуждая, таким образом, приходим к n_z уравнениям

$$\begin{aligned}
 R_1(Z_1, Z_2, \dots, Z_{n_z}, P, q) &= 0; \\
 R_2(Z_1, Z_2, \dots, Z_{n_z}, P, q) &= 0; \\
 &\dots\dots\dots \\
 R_{n_z}(Z_1, Z_2, \dots, Z_{n_z}, P, q) &= 0.
 \end{aligned}
 \tag{4.3}$$

Используя принцип независимости действия сил, раскроем (4.3):

$$\begin{aligned}
 R_1 &= R_{11} + R_{12} + \dots + R_{1n_z} + R_{1P} + R_{1q} = 0; \\
 R_2 &= R_{21} + R_{22} + \dots + R_{2n_z} + R_{2P} + R_{2q} = 0; \\
 &\dots\dots\dots \\
 R_{n_z} &= R_{n_z 1} + R_{n_z 2} + \dots + R_{n_z n_z} + R_{n_z P} + R_{n_z q} = 0;
 \end{aligned}
 \tag{4.4}$$

где R_{ij} — реакция в связи с номером i от перемещения Z_j .

Учитывая, что по закону Гука

$$R_{ij} = r_{ij} \cdot Z_j \tag{4.5}$$

и обозначив $n = n_z$, запишем систему канонических уравнений для определения Z_i

$$\begin{cases}
 r_{11}Z_1 + r_{12}Z_2 + \dots + r_{1n}Z_n + R_{1p} + R_{1q} = 0; \\
 r_{21}Z_1 + r_{22}Z_2 + \dots + r_{2n}Z_n + R_{2p} + R_{2q} = 0 \\
 \dots\dots\dots \\
 r_{n1}Z_1 + r_{n2}Z_2 + \dots + r_{nn}Z_n + R_{np} + R_{nq} = 0.
 \end{cases} \quad (4.6)$$

Если $Z_j = 1$, то по (4.5) $R_{ij} = r_{ij}$, то есть r_{ij} — реакция в связи основной системы с номером i от перемещения $Z_j = 1$. В дальнейшем r_{ij} будем называть единичными реакциями. Свободные члены системы уравнений R_{ip}, R_{iq} представляют собой реакции в связях основной системы от заданной нагрузки. Их часто называют грузовыми реакциями. Все реакции R_i положительны, если направлены в ту же сторону, что и соответствующее перемещение Z_i .

Для определения реакций в связях основной системы применяются два способа: статический и аналитический. При статическом способе реакции во введённых связях определяются, используя метод сечений — составляя уравнение равновесия части расчётной схемы, содержащей конкретную связь. Этот способ рассмотрим на примере в п. 4.4.

4.1.3. Аналитический способ определения реакций в основной системе

Рассмотрим фрагмент основной системы метода перемещений в виде одной балки II типа в двух состояниях: при $\bar{Z}_i = 1$ и $\bar{Z}_j = 1$ (рис. 63, а и з). Эпюры изгибающих моментов в таких балках (рис. 63, б и д) построим с помощью готового решения (см. п 3.3, пример б). Превратим нашу балку в двух состояниях в балку с шарнирами у плавающих заделок, приложив к сечениям справа и слева от шарниров соответствующие изгибающие моменты (рис. 63, в и е). Будем считать состояние i (рис. 63, в) действительным, а j (рис. 63, е) — состоянием, перемещения в котором являются возможными для состояния i .

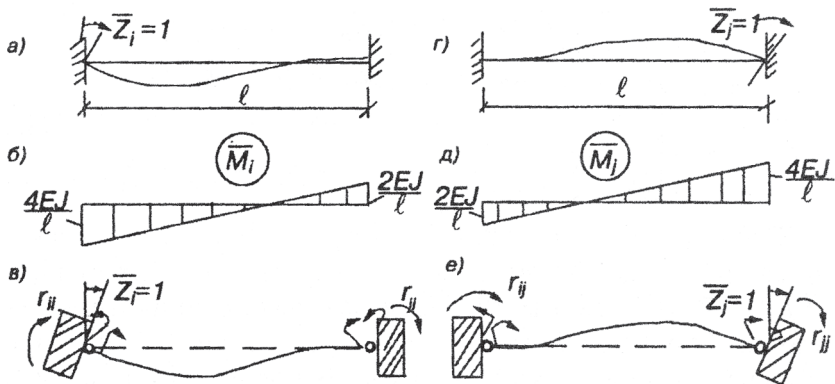


Рис. 63

В соответствии с принципом возможных перемещений (см. п. 2.3), используя (2.12), (2.13) получим

$$A_{ij} + W_{ij} = 0;$$

$$A_{ij} = -W_{ij} = \sum \int \frac{\bar{M}_i \bar{M}_j dS}{EJ}.$$

Единственным внешним силовым фактором в состоянии i , совершающим работу, является единичная реакция r_{ji} :

$$A_{ij} = r_{ji} \cdot \bar{Z}_j = r_{ji} = \sum \int \frac{\bar{M}_i \bar{M}_j dS}{EJ}.$$

Применяя к двум состояниям теорему о взаимности возможных работ (2.37), получим $A_{ij} = A_{ji}$; $r_{ji} \cdot \bar{Z}_j = r_{ij} \cdot \bar{Z}_i$. Отсюда,

$$r_{ij} = r_{ji}, \quad (4.7)$$

выражающее теорему о взаимности единичных реакций, которая приводит к симметричности коэффициентов r_{ij} при неизвестных Z_j в системе (4.6) относительно членов r_{ii} на главной диагонали.

$$\text{Окончательно, имеем } r_{ij} = r_{ji} = \sum \int \frac{\bar{M}_i \bar{M}_j dS}{EJ}. \quad (4.8)$$

Следовательно, для вычисления реакции в связи основной системы с номером i от перемещения $\bar{Z}_j = 1$ нужно построить в основной системе эпюры изгибающих моментов в обоих единичных состояниях (при $\bar{Z}_i = 1$ и $\bar{Z}_j = 1$), и перемножить их под интегралом, например, используя правило Верещагина.

Для вывода формулы грузовой реакции R_{iP} рассмотрим основную систему метода перемещений (рис. 64, б) для рамы (рис. 64, а).

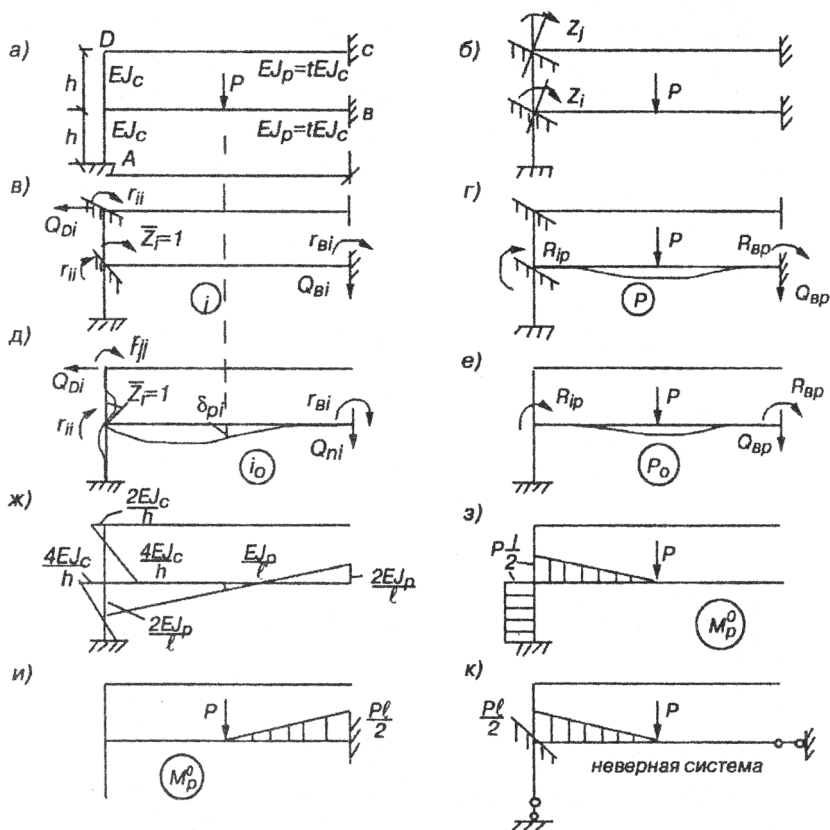


Рис. 64

На рис. 64, в и г показаны соответственно состояние основной системы при единичном повороте введённой связи i на угол $\bar{Z}_i = 1$ (i -е состояние) и состояние при действии силы P (p -ое состояние). В каждом из этих состояний в связях возникают соответствующие реакции. Для того, чтобы к этим состояниям можно было применить теорему о взаимности работ, поступим следующим образом. Представим систему, в которой отсутствуют плавающие заделки i и j и часть заданных опорных связей, и приложим к этой системе сначала все реакции в этих связях в i -ом состоянии (R_{ii}, R_{ji}, R_{Bi}) — получится состояние i_0 (рис. 64, д), а затем к той же системе приложим все реакции в p -ом состоянии (R_{ip}, R_{BP}, Q_{BP}) и силу P — получится состояние p_0 (рис. 64, е). Обе системы имеют одинаковые опорные закрепления и, следовательно, перемещения в любой из этих систем являются возможными для другой. По теореме о взаимности работ

$$A_{pi}^0 = A_{ip}^0, \quad (4.9)$$

где A_{pi}^0 — работа сил в состоянии p_0 на возможных перемещениях для этой системы, за которые приняты перемещения в состоянии i_0 :

$$A_{pi}^0 = R_{ip} \cdot \bar{Z}_i + P \cdot \delta_{pi}; \quad (4.10)$$

A_{ip}^0 — работа сил в состоянии i_0 на возможных для него перемещениях в состоянии p_0 :

$$A_{ip}^0 = 0. \quad (4.11)$$

Подставляя (4.10) и (4.11) в (4.9), получим

$$R_{ip} \cdot \bar{Z}_i + P \cdot \delta_{pi} = 0. \quad (4.12)$$

Отсюда $R_{ip} = -P \cdot \delta_{pi}, \quad (4.13)$

где δ_{pi} — перемещение по направлению P , вызываемое поворотом узла $\bar{Z}_i = 1$.

Это перемещение может быть найдено по формуле Мора

$$\delta_{pi} = \sum \int \frac{\overline{M}_p^0 \overline{M}_i dS}{EJ}. \quad (4.14)$$

Напомним, что суммирование проводится по всем участкам стержневой системы.

В соответствии с (4.14) нужно построить две эпюры моментов: \overline{M}_i — ординаты эпюры моментов в основной системе метода перемещений от причины, вызывающей δ_{pi} , от поворота $\overline{Z}_i = 1$ (рис. 64, ж) (эти ординаты определяются по готовым решениям, рассмотренным в параграфе 3.3); \overline{M}_p^0 — ординаты эпюры изгибающих моментов в системе без плавающих заделок от силы $\overline{P} = 1$, приложенной по направлению искомого перемещения (совпадает с направлением силы P , от которой мы ищем реакцию в основной системе метода перемещений).

Если умножить ординаты \overline{M}_p^0 на P , как это требуется по (4.13), то получим ординаты эпюры $M_p^0 = P \cdot \overline{M}_p^0$, то есть ординаты эпюры изгибающих моментов в системе без связей метода перемещений от заданной силы P , и, подставляя (4.14) в (4.13), окончательно будем иметь

$$R_{ip} = -\sum \int \frac{M_p^0 \overline{M}_i dS}{EJ}. \quad (4.15)$$

Остановимся подробнее на проблеме выбора системы для построения эпюры M_p^0 . В этой системе должно быть одно ограничение — в ней должна отсутствовать связь, препятствующая перемещению Z_i . Система может иметь много разновидностей. Например, система (рис. 64, з) и система (рис. 64, и) при вычислении (4.15) дадут одинаковый результат. Действительно, при перемножении эпюры \overline{M}_i (рис. 64, ж) на эпюру M_p^0 (рис. 64, з)

$$R_{ip} = -\sum \int \frac{M_p^0 \overline{M}_i dS}{EJ} = -\frac{1}{EJ_c} \left[-\frac{Pl \cdot 1 \cdot 1}{2 \cdot 2 \cdot 2} \left(\frac{2 \cdot 4EJ_p}{3 \cdot 1} + \frac{1 \cdot EJ_p}{3 \cdot 1} \right) + \left(\frac{4EJ_c}{h} - \frac{2EJ_c}{h} \right) \frac{h \cdot Pl}{2 \cdot 2} \right] = -\frac{Pl}{8},$$

а при перемножении эпюры \overline{M}_i (рис. 64, ж) на эпюру M_p^0 (рис. 64, и)

$$R_{ip} = -\sum \int \frac{M_p^0 \overline{M}_i dS}{EJ} = -\frac{1}{EJ_c} \left[-\frac{Pl \cdot l \cdot 1}{2 \cdot 2 \cdot 2} \left(\frac{2 \cdot 2EJ_p}{3 \cdot l} - \frac{1 \cdot EJ_p}{3 \cdot l} \right) \right] = -\frac{Pl}{8}$$

Выбрав систему (рис. 64, к), мы получим неверный результат, так как эта система не удовлетворяет требованию отсутствия связи по направлению Z_i .

Системы, обеспечивающие правильный результат (рис. 64, з) и (рис. 64, и), статически определимые. Но это качество несущественно — если у нас есть готовая эпюра M_p^0 от нагрузки в статически неопределимой системе, которая может быть получена из заданной путём отбрасывания не всех n связей, то при перемножении по (4.15) мы получим правильный результат.

На рис 65, а показана такая статически неопределимая система, полученная из заданной (рис. 64, а) путём отбрасывания 5-ти связей вместо 6-ти. Эпюра изгибающих моментов для неё (рис. 65, б) получена методом сил (расчет опускаем). При подстановке в (4.15) она даёт тот же результат, что и эпюры (рис. 64, з) и (рис. 64, и).

$$R_{ip} = -\sum \int \frac{M_p^0 M_i dS}{EJ} = -\frac{1}{EJ_c} \left[\frac{3Ph \cdot h}{16 \cdot 2} \left(\frac{1 \cdot 2 \cdot EJ_c}{3 \cdot h} - \frac{2 \cdot 4EJ_p}{3 \cdot h} \right) + \frac{3Ph}{16} \frac{l \cdot 1 \cdot 1}{2 \cdot t \cdot 2} \left(\frac{4EJ_p}{l} + \frac{EJ_p}{l} \right) + \frac{l}{2 \cdot 6 \cdot t} \left(2 \frac{EJ_p}{l} \frac{3Ph}{16} + 2 \frac{2EJ_p}{l} \frac{13Ph}{16} - \frac{EJ_p}{l} \frac{3Ph}{16} - \frac{2EJ_p}{l} \frac{13Ph}{16} \right) \right] = -\frac{Pl}{8}$$

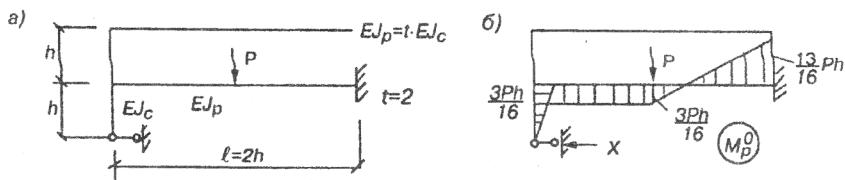


Рис. 65

Самым простым явилось применение системы (рис. 64, *и*).

Конечно, использование статически неопределимых систем для определения R_{iP} более трудоёмко, чем статически определимых.

Подводя итог, приходим к выводу, что если систему для построения эпюры M_P^0 образовывать из заданной, а не из основной метода перемещений, то связь, препятствующая перемещению по направлению i , о которой шла речь выше, будет отсутствовать всегда.

Таким образом, для вычисления грузовой реакции R_{iP} во введённой связи с номером i от заданной внешней нагрузки нужно сделать следующие действия:

1) построить в основной системе метода перемещений эпюру изгибающих моментов \bar{M}_i от $\bar{Z}_i = 1$ (рис. 64, *ж*);

2) выбрать из заданной системы геометрически неизменяемую статически определимую систему (так, как это делалось при расчёте по методу сил — путём отбрасывания *и* лишних существующих связей) и построить в ней эпюру M_P^0 от внешней нагрузки;

3) перемножить обе эпюры под интегралом и взять результат с обратным знаком.

4.1.4. Статический способ вычисления реакций в основной системе метода перемещений и их аналитическая проверка на примере расчёта рамы

Построить эпюру изгибающих моментов для рамы (рис. 66, *а*) при действии на неё узловой горизонтальной силы $P=90$ кН и равномерно распределённой нагрузки $q=30$ кН/м, $\ell=h=3$ м.

Решение.

1. Устанавливаем степень кинематической неопределимости (4.1):

$$n_z = n_y + n_l.$$

$n_y=1$ — один жёсткий узел (не считая опорных).

Для определения n_l врезаем во все узлы (включая и опорные) полные шарниры (рис. 66, *в*) и считаем степень подвижности (4.2) $W = 2Y - C$, $Y = 2$ — число изолированных узлов, $C = 4$ — число связей, $W = 2 \cdot 2 - 4 = 0$.

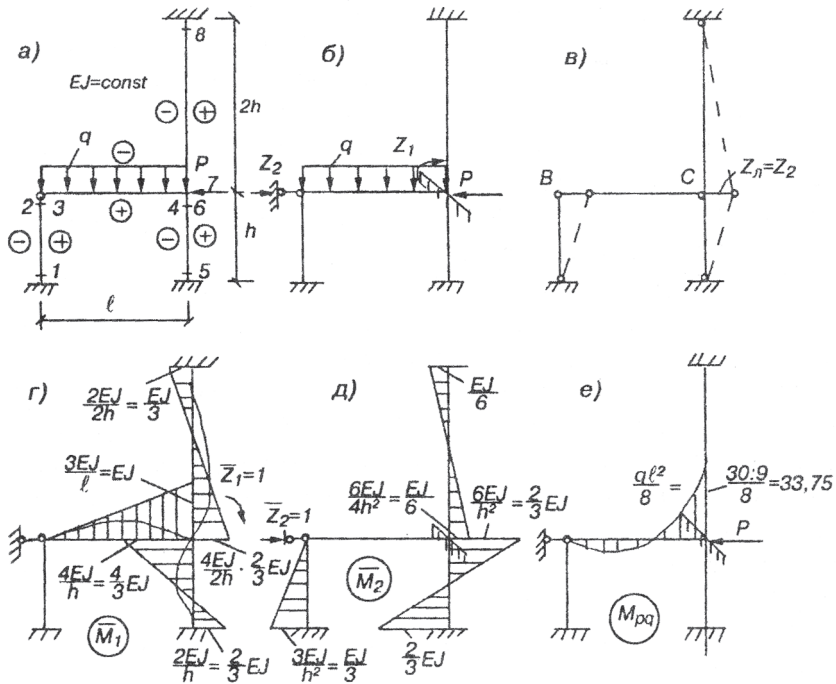


Рис. 66

Общее число связей достаточно для неизменяемости, но одна из вертикальных связей поставлена неверно — шарнир С соединён с “землёй” двумя связями, лежащими на одной прямой. Система (рис. 66, в) мгновенно изменяемая — возможно горизонтальное смещение диска ВС. Этот случай разобран в п. 4.1.1. и число линейных неизвестных $n_l = n_u = 1$. Итак, степень кинематической неопределимости равна $n_z = 2$. Неизвестные метода перемещений: угол поворота Z_1 и линейное перемещение диска ВС на величину Z_2 .

2. По направлению неизвестных устанавливаем дополнительные связи — образуем основную систему метода перемещений (рис. 66, б). В месте угла поворота Z_1 устанавливаем плавающую заделку, а по направлению перемещения Z_2 — линейную связь. Основная система представляет со-

бой составленные вместе статически неопределимые балки I и II типа. Основная система находится под действием заданной нагрузки и неизвестных перемещений Z_1 и Z_2 . Направления перемещений выбираем произвольно и они будут считаться положительными на протяжении всего дальнейшего расчёта.

3. Записываем систему двух канонических уравнений метода перемещений по (4.6):

$$\begin{cases} r_{11} \cdot Z_1 + r_{12} \cdot Z_2 + R_{1p} + R_{1q} = 0; \\ r_{21} \cdot Z_1 + r_{22} \cdot Z_2 + R_{2p} + R_{2q} = 0. \end{cases}$$

4. Вычисляем коэффициенты канонических уравнений. Для этого основную систему метода перемещений рассматриваем в трёх независимых состояниях, в каждом из которых строим эпюру моментов (учитываем только деформации изгиба). В первом состоянии плавающая заделка в узле \underline{C} поворачивается на угол $\bar{Z}_1 = 1$ (чёрточка указывает, что \bar{Z}_1 не равно Z_1 , а только совпадает с Z_1 по направлению). Перемещение по направлению Z_2 отсутствует. Эпюра моментов M_1 в каждой из стержней основной системы строится по готовым решениям для балок I и II типов (см. п. 3.3) в соответствии с видом изогнутой оси (рис. 66, ε) — ординаты откладываются в сторону растянутого волокна.

Во втором состоянии ригель смещается на величину $\bar{Z}_2 = 1$, а плавающая заделка не поворачивается. Эпюра моментов M_2 так же строится с помощью шаблонов (см. п. 3.3) в соответствии с видом изогнутой оси каждой балки I и II типов (рис. 66, δ).

В третьем состоянии основная система находится под действием заданной нагрузки при неподвижных опорных закреплениях. Эпюра M_{pq} (рис. 66, e) так же строится с помощью готовых решений (см. п. 3.3).

Коэффициенты канонических уравнений будем определять статическим способом.

Коэффициент r_{11} — это реакция в плавающей заделке по направлению перемещения Z_1 от самого этого перемеще-

ния. Вырезаем в первом состоянии (рис. 66, з) узел с плавающей заделкой и показываем в сечениях изгибающие моменты (рис. 67, а), величина и направление которых соответствует эпюре \bar{M}_1 .

Здесь же показываем искомую реакцию r_{11} , положительное направление которой всегда должно совпадать с выбранным направлением Z_1 .

Составляем уравнение равновесия для узла

$$\sum m_C = 0; r_{11} - \frac{4EJ}{h} - \frac{4EJ}{2 \cdot h} - \frac{3EJ}{l} = 0; \quad r_{11} = 3EJ.$$

Коэффициент r_{12} — это реакция в плавающей заделке от перемещения $\bar{Z}_2 = 1$. Поэтому в состоянии 2 вырезаем узел с плавающей заделкой 1 (рис. 67, б), показываем реакцию r_{12} и все изгибающие моменты в сечениях, учитывая положение растянутых волокон по эпюре \bar{M}_2 (рис. 66, д). Составляем уравнение равновесия для узла

$$\sum m_C = 0; r_{12} + \frac{6EJ}{h^2} - \frac{6EJ}{4 \cdot h^2} = 0; \quad r_{12} = -0.5EJ.$$

Коэффициент r_{21} — это реакция в связи 2 от перемещения $\bar{Z}_1 = 1$ в состоянии 1. Поэтому в состоянии 1 вырезаем ригель ВС, показываем реакцию r_{21} в опорной связи и поперечные силы в сечениях стержней, примыкающих к ригелю (рис. 67, в). Положительное направление r_{21} показываем совпадающим с направлением Z_2 . В сечениях стоек показываем поперечные силы, величина и направление которых соответствует эпюре \bar{M}_1 . Составляем уравнение равновесия ригеля ВС

$$\sum X = 0; r_{21} - \frac{6EJ}{4 \cdot h^2} + \frac{6EJ}{h^2} = 0; \quad r_{21} = -0.5EJ.$$

Видим, что по величине $r_{12} = r_{21}$, что соответствует (4.7). Интересно, что r_{12} и r_{21} совершенно различные физические величины: r_{12} — реакция в виде момента, а r_{21} — реакция в виде силы.

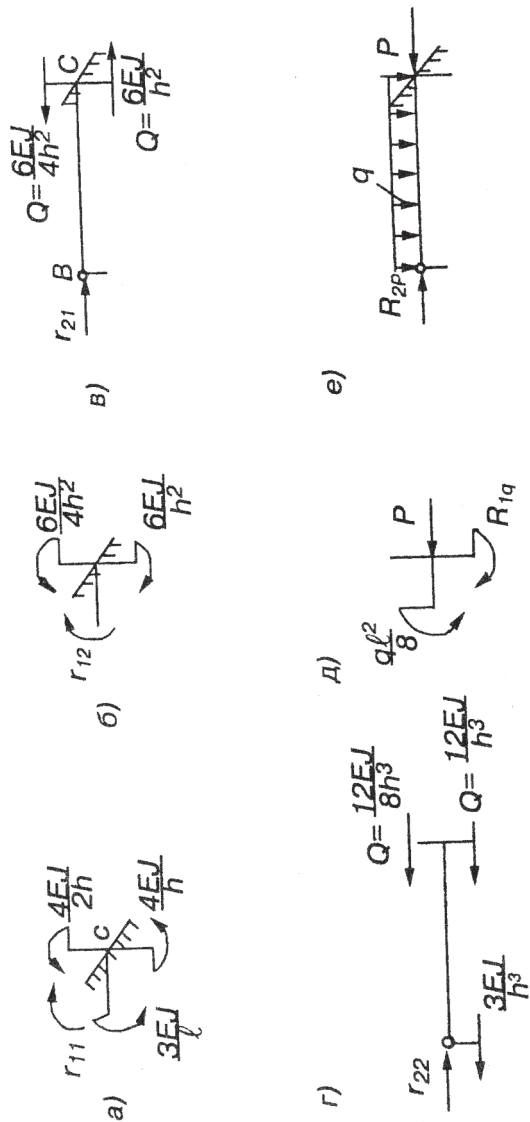


Рис. 67

Коэффициент r_{22} — это реакция в связи 2 от перемещения $Z_2 = 1$ в состоянии 2 (рис. 66, д). Поэтому выполняем ту же процедуру, что и при вычислении r_{21} , но в состоянии 2 (рис. 67, з). Составляем уравнение равновесия ригеля BC

$$\sum X = 0; \quad r_{22} - \frac{12EJ}{8 \cdot h^3} - \frac{12EJ}{h^3} - \frac{3EJ}{h^3} = 0; \quad r_{22} = \frac{11}{8} EJ.$$

Для определения свободных членов системы уравнений или “грузовых” реакций рассматриваем третье состояние с эпюрой M_{pq} (рис. 66, е). Реактивный момент R_{1p} в плавающей заделке I равен нулю, так как сила P приложена к центру узла. Реактивный момент R_{1q} определяем, вырезая узел с плавающей заделкой в третьем грузовом состоянии (рис. 67, д). Составляем уравнение равновесия

$$\sum m_C = 0; \quad R_{1q} - \frac{ql^2}{8} = 0; \quad R_{1q} = \frac{ql^2}{8} = \frac{30 \cdot 9}{8} = 33.75 \text{ кНм.}$$

Реакция в связи 2 от нагрузки q равна нулю $R_{2q} = 0$, а для вычисления R_{2p} , рассмотрим равновесие ригеля в третьем состоянии (рис. 67, е)

$$\sum X = 0; \quad R_{2p} - P = 0; \quad R_{2p} = P = 90 \text{ кН.}$$

5. Проводим проверку правильности вычисления коэффициентов. Для этого воспользуемся формулами (4.8) и (4.15). Построим суммарную единичную эпюру в основной системе метода перемещений (рис. 68, а). Ординаты эпюры M_S определяются по формуле $M_S = M_1 + M_2$. Кроме того, построим из заданной статически определимую геометрически неизменяемую систему (рис. 68, б) и определим в ней изгибающие моменты от заданной нагрузки — ординаты эпюры M_p^0 .

Вычислим интеграл типа (4.8)

$$\begin{aligned} r_{ss} &= \sum \int \frac{\overline{M}_S \overline{M}_S dS}{EJ} = \sum \int \frac{(\overline{M}_1 + \overline{M}_2)^2 dS}{EJ} = \sum \int \frac{\overline{M}_1^2 dS}{EJ} + \\ &+ 2 \sum \int \frac{\overline{M}_1 \overline{M}_2 dS}{EJ} + \sum \int \frac{\overline{M}_2^2 dS}{EJ} = r_{11} + r_{12} + r_{21} + r_{22}; \end{aligned} \quad (4.17)$$

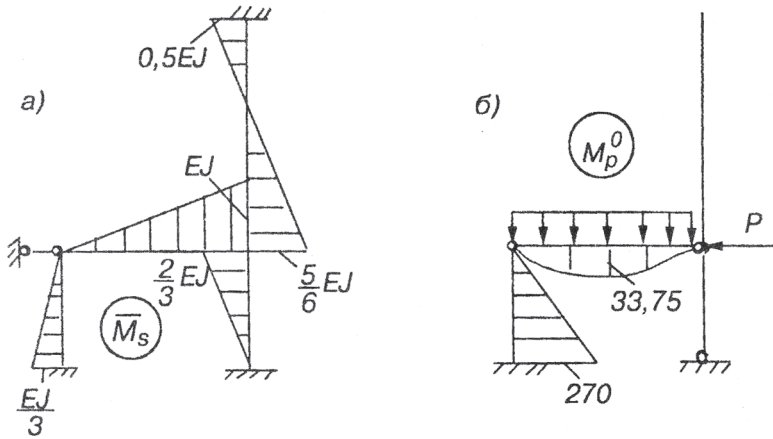


Рис. 68

Таким образом, если вычислить r_{SS} с помощью перемножения эпюры M_S саму на себя под интегралом, то результат должен быть равен сумме коэффициентов при неизвестных. Проведём эту проверку (рис. 68, а):

$$r_{ss} = \sum \int \frac{\bar{M}_S M_S dS}{EJ} = \frac{1}{EJ} \left[\frac{EJ}{3} \cdot \frac{3 \cdot 2EJ}{2 \cdot 3 \cdot 3} + \frac{EJ}{2} \cdot \frac{3 \cdot 2EJ}{3} + \frac{2EJ}{3} \cdot \frac{3 \cdot 2 \cdot 2EJ}{2 \cdot 3 \cdot 3} + \frac{6}{6} \cdot \left(2 \cdot \left(\frac{5}{6} EJ \right)^2 + 2 \cdot (0.5EJ)^2 - 2 \cdot 0.5EJ \cdot \frac{5}{6} EJ \right) \right] = \frac{47}{18} EJ.$$

С другой стороны

$$r_{11} + 2 \cdot r_{12} + r_{22} = 3EJ - 2 \cdot 0.5EJ + \frac{11}{8} EJ = \frac{47}{18} EJ.$$

Результаты совпали, следовательно, коэффициенты при неизвестных найдены верно.

Далее вычислим интеграл типа (4.15)

$$\begin{aligned} R_{Sp} &= - \sum \int \frac{M_p^0 \bar{M}_S dS}{EJ} = - \sum \int \frac{M_p^0 (\bar{M}_1 + \bar{M}_2) dS}{EJ} = \\ &= - \sum \int \frac{M_p^0 \bar{M}_1 dS}{EJ} - \sum \int \frac{M_p^0 \bar{M}_2 dS}{EJ} = R_{1P} + R_{2P}, \end{aligned}$$

где индекс P объединяет действие и нагрузки q и сосредоточенной силы. Таким образом, если вычислить R_{SP} с помощью перемножения под интегралом эпюры \overline{M}_S на эпюру M_P^0 , то результат будет равен сумме “грузовых” коэффициентов системы уравнений. Для нашей системы получим

$$R_{SP} = -\sum \int \frac{\overline{M}_S M_P^0 dS}{EJ} = -\frac{1}{EJ} \left(-\frac{Ph \cdot h}{2} \cdot \frac{2}{3} \frac{EJ}{3} - \frac{2}{3} \frac{ql^2}{8} \cdot l \cdot \frac{EJ}{2} \right) = 123.75.$$

С другой стороны

$$R_{1P} + R_{2P} + R_{1q} + R_{2q} = 0 + 90 + 33.75 + 0 = 123.75 .$$

Результаты совпали, следовательно, свободные члены системы уравнений найдены верно.

4.1.5. Продолжение расчёта рамы методом перемещений в матричной форме

В дальнейшем конкретные вычисления для рамы (рис. 66, a) будем сопровождать выводом формул для общего случая n раз кинематически неопределимой системы.

1. Размечаем начало и конец каждого участка рамы своим номером, выбираем правило знаков для ординат эпюр моментов для каждого участка — готовим схему рамы к расчёту в матричной форме (точно так же, как при расчёте по методу сил).

Конечной целью расчёта является вычисление вектора \vec{M} , элементами которого являются ординаты окончательной эпюры моментов в расчётных сечениях и величины стрелок на участках, где действует равномерно распределённая нагрузка. Если в системе N сечений и одна стрелка, то

$$\vec{M} = [m_1 \quad m_2 \quad m_3 \quad f \quad m_4 \quad \dots \quad m_8 \quad \dots \quad m_N] \cdot \quad (4.18)$$

2. После выбора основной системы метода перемещений (для нашей рамы это сделано в п. 4.1.1) запишем вектор неизвестных

$$\vec{Z} = [Z_1 \quad Z_2 \quad \dots \quad Z_n] \cdot \quad (4.19)$$

3. Записываем систему n канонических уравнений метода перемещений типа (4.6) в виде

$$R \cdot \vec{Z} = -\vec{R}_P, \quad (4.20)$$

где R — матрица единичных реакций или матрица жёсткости

$$R = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & \cdots & r_{1n} \\ r_{21} & r_{22} & \cdots & r_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ r_{n1} & r_{n2} & \cdots & r_{nn} \end{bmatrix}, \quad (4.21)$$

\vec{R}_P — вектор грузовых или свободных членов

$$\vec{R}_P = [R_{1P} \quad R_{2P} \quad \cdots \quad R_{nP}]. \quad (4.22)$$

4. В основной системе (рис. 66, б) строим эпюры моментов при нескольких состояниях: единичных (всего n) и грузовом (для нашего примера это уже сделано в п. 4.1.4 [4]). Все единичные эпюры, записанные в виде матриц столбцов, образуют матрицу влияния моментов (аналогично (3.9) в методе сил)

$$L_m = \left[\begin{array}{cccc} \vec{M}_1 & \vec{M}_2 & \cdots & \vec{M}_n \end{array} \right]. \quad (4.23)$$

Ординаты грузовой эпюры образуют вектор \vec{M}_P . Для нашего примера

$$L'_m = EJ \left[\begin{array}{cccccccc} 0 & 0 & 0 & -1 & \frac{2}{3} & -\frac{4}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{6} & -\frac{1}{6} \end{array} \right];$$

$$\vec{M}_P = [0 \quad 0 \quad 0 \quad 33.75 \quad -33.75 \quad 0 \quad 0 \quad 0].$$

5. Из заданной системы путём отбрасывания связей образуем статически определимую систему, в которой от нагрузки строим эпюру моментов (рис. 68, б), ординаты которой образуют вектор

$$\vec{M}_P = [270 \ 0 \ 0 \ 33.75 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0] \cdot$$

6. Проведём вывод формул для вычисления матриц R и \vec{R}_P . Сравнивая формулу для перемещений типа (3.7)

$$\delta_{ij} = \sum \int \frac{\overline{M}_i \overline{M}_j dS}{EJ} = \vec{M}_i^t \cdot \mathbf{V} \cdot \vec{M}_j \text{ и для единичных реакций (4.8)}$$

$$r_{ij} = r_{ji} = \sum \int \frac{\overline{M}_i \overline{M}_j dS}{EJ}, \text{ убеждаемся в их полном структур-}$$

ном совпадении (при этом изгибающие моменты в обеих формулах возникают в разных основных системах). Поэтому r_{ij} можно определять по трёхчленной матричной формуле

$$r_{ij} = \vec{M}_i^t \cdot \mathbf{V} \cdot \vec{M}_j, \quad (4.24)$$

где \vec{M}_i и \vec{M}_j — векторы эпюр моментов в единичных состояниях (при $Z_i = 1$ и $Z_j = 1$) основной системы метода перемещений. Таким образом, для всей матрицы реакций можно применить формулу типа (3.12)

$$R = L_m^t \cdot \mathbf{V} \cdot L_m \cdot \quad (4.25)$$

Рассуждая аналогичным образом, вместо (4.15) в матричной форме будем иметь

$$R_{iP} = -\vec{M}_i^t \cdot \mathbf{V}_f \cdot \vec{M}_P^{0f} \quad (4.26)$$

Далее весь вектор можно получить по формуле

$$\vec{R}_P = -L_m^t \cdot \mathbf{V}_f \cdot \vec{M}_P^{0f} \quad (4.27)$$

Формулы (4.25) и (4.27) получены для общего случая. В нашем примере мы получили коэффициенты системы уравнений статическим способом (см. п. 4.1.4)

$$R = EJ \begin{bmatrix} 3 & -0.5 \\ -0.5 & \frac{11}{8} \end{bmatrix}; \quad \vec{R}_P = \begin{bmatrix} 33.75 \\ 90 \end{bmatrix}.$$

7. Решаем систему уравнений (4.20) с помощью обратной матрицы R^{-1}

$$\vec{Z} = -R^{-1} \cdot \vec{R}_P \quad (4.28)$$

Обратная матрица для нашей системы имеет вид

$$R^{-1} = \frac{8}{31EJ} \begin{bmatrix} \frac{11}{8} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 3 \end{bmatrix}.$$

Проводя вычисления по (4.28), получим вектор перемещений

$$\vec{Z} = -\frac{8}{31EJ} \begin{bmatrix} \frac{11}{8} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 33.75 \\ 90 \end{bmatrix} = \frac{1}{EJ} \begin{bmatrix} -41.44768 \\ -181.18421 \end{bmatrix}.$$

Отрицательные величины перемещений свидетельствуют о том, что их направления не совпадают с выбранными в начале расчёта.

8. Окончательные значения изгибающих моментов в отмеченных сечениях рамы получим складывая эпюры от каждого Z_i и от нагрузки в основной системе. Ординаты эпюр от Z_i вычисляем умножением единичных эпюр на найденные значения Z_i . Вся процедура умножения на Z_i и сложения векторов описывается (так же как и в методе сил (3.15)) формулой

$$\vec{M} = \vec{M}_P + L_m \cdot \vec{Z}. \quad (4.29)$$

Для нашей рамы без учёта стрелки (будет учтена при построении окончательной эпюры)

$$\vec{M} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -33.75 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + EJ \cdot \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ -1 & 0 \\ \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{4}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{4}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{6} \end{bmatrix} \times \frac{1}{EJ} \cdot \begin{bmatrix} -41.447368 \\ -181.18421 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 60.3947 \\ 0 \\ 0 \\ 7.6974 \\ 93.1586 \\ -65.5277 \\ -57.8283 \\ 44.0128 \end{bmatrix}$$

Отметим, что так же как в методе сил, абсолютная величина жёсткости сечения не влияет на значения ординат окончательной эпюры моментов — играют роль отношения жёсткости каждого сечения к модульной жёсткости, за которую можно принять любое значение.

Окончательная эпюра моментов показана на рис. 69, а.

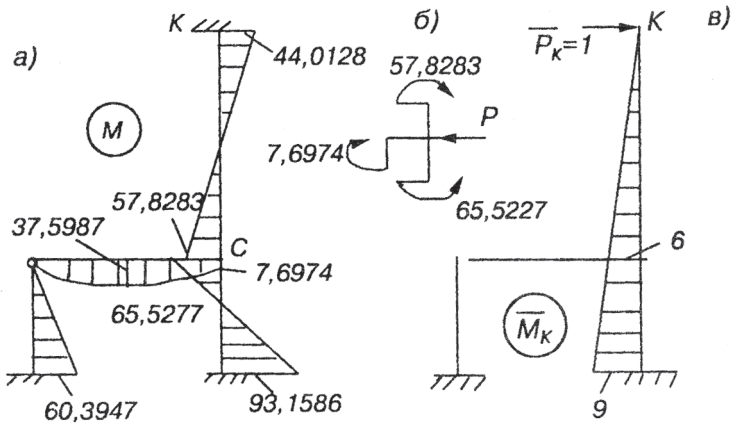


Рис. 69

9. Проведём проверку правильности построения статическим способом. Вырежем узел C (рис. 69, б) и в сечениях покажем изгибающие моменты. Составим уравнение равновесия $\sum m_C = 0$; $-7.6974 - 57.8283 + 65.5227 = 0$. Условие равновесия узла удовлетворяется.

Проведём деформационную проверку. Для этого превратим заданную систему в статически определимую (рис. 69, з), приложим в точке K силу $\bar{P}_K = 1$ и построим эпюру моментов \bar{M}_K . Эту эпюру будем использовать для определения горизонтального перемещения точки K , которое заведомо должно быть равно нулю, так как в этом месте находится опора K .

$$\begin{aligned} \delta_{KP} &= \sum \int \frac{\bar{M}_K M_{OK} dS}{EJ} = \frac{1}{EJ} \left[\frac{6 \cdot 6}{2} \left(\frac{2}{3} \cdot 57.8283 - \frac{1}{3} \cdot 44.0128 \right) + \right. \\ &+ \frac{3}{6} (-2 \cdot 9 \cdot 93.1586 + 2 \cdot 6 \cdot 65.5227 + 65.5227 \cdot 9 - 6 \cdot 93.1586) \left. \right] = \\ &= \frac{1}{EJ} [429.8634 - 429.9148] \approx 0 \cdot \end{aligned}$$

Погрешность составляет $\frac{0.0514}{429.8634} \cdot 100\% = 0.012\%$. Точ-

ность вполне достаточная, следовательно, окончательная эпюра изгибающих моментов построена верно.

10. Построим эпюру поперечных сил так же, как это делалось в п. 3.1.3 при расчёте рамы методом сил.

$$\text{Участок } 1-2. \quad Q_{1-2} = -\frac{60.3947}{3} = -20.13 \text{ кН.}$$

$$\text{Участок } 5-6. \quad Q_{5-6} = -\frac{93.1586 + 65.5227}{3} = -52.89 \text{ кН.}$$

$$\text{Участок } 7-8. \quad Q_{7-8} = \frac{44.0128 + 57.8283}{6} = 16.97 \text{ кН.}$$

Вырезаем участок 3-4 и из условий его равновесия определяем поперечные силы в крайних сечениях (рис. 70, а).

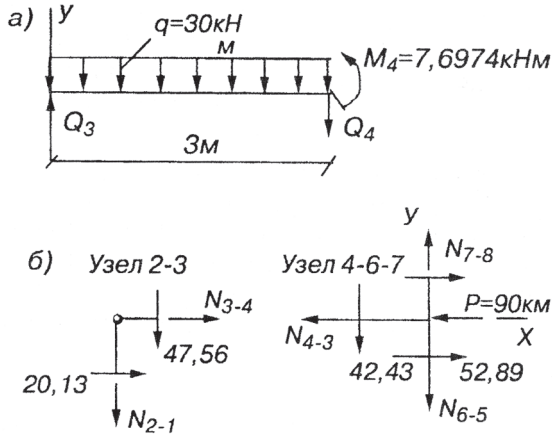


Рис. 70

$$\sum m_3 = 0; M_4 - q \cdot \frac{3^2}{2} - Q_4 \cdot 3 = 0; Q_4 = \frac{M_4 - q \cdot 4.5}{3} = \frac{7.6974 - 30 \cdot 4.5}{3} = -42.43 \text{ кН}$$

$$\sum m_4 = 0; M_4 + q \cdot \frac{3^2}{2} - Q_3 \cdot 3 = 0; Q_3 = \frac{M_4 + q \cdot 4.5}{3} = \frac{7.6974 + 30 \cdot 4.5}{3} = 47.56 \text{ кН}$$

Проверка $\sum Y = 0; Q_3 - Q_4 - q \cdot 3 = 0; 47.56 + 42.43 - 90 = 0$.

Эпюра Q показана на рис. 71, а.

11. Построим эпюру нормальных сил, рассматривая равновесие узлов рамы (рис. 70, б).

$$\text{Узел 2-3. } \sum Y = 0; -N_{2-1} - 47.56 = 0; N_{2-1} = -47.56 \text{ кН}$$

$$\sum X = 0; N_{3-4} + 20.13 = 0; N_{3-4} = -20.13 \text{ кН}$$

$$\text{Узел 4-6-7. } \sum X = 0; 16.97 + 52.89 - 90 - N_{4-3} = 0; N_{4-3} = -20.14 \text{ кН}$$

Нормальные силы в крайних сечениях ригеля 3-4 одинаковы. Для вычисления двух значений N_{6-5} и N_{7-8} остаётся одно уравнение $\sum Y = 0; N_{7-8} - N_{6-5} - 42.43 = 0$.

Следовательно, задача определения нормальных сил является статически неопределимой и нужно составить уравнение деформаций вдоль стоек 5-6-7-8.

Под действием растягивающих сил N_{6-5} и N_{7-8} (рис. 70, б) соответствующие участки изменят свою длину,

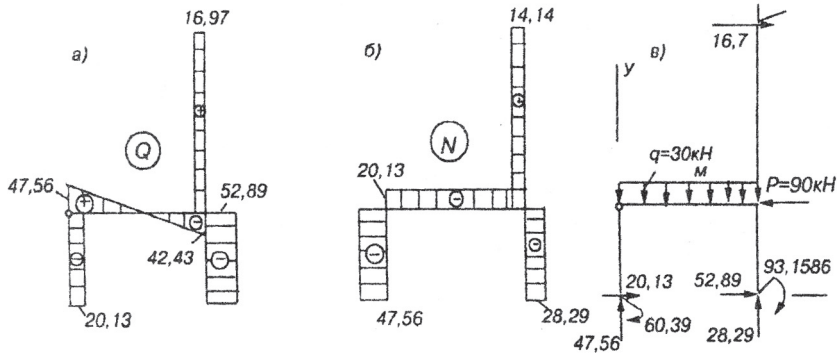


Рис. 71

но сумма этих изменений должна быть равна нулю, так как длина двух стоек должна остаться неизменной $\Delta l_{7-8} + \Delta l_{6-5} = 0$.

Подставим сюда выражения деформаций участков, предполагая их упругими

$$\frac{N_{7-8} \cdot 2h}{EF} + \frac{N_{6-5} \cdot h}{EF} = 0.$$

Отсюда получаем второе уравнение $N_{7-8} \cdot 2 + N_{6-5} = 0$. Решая совместно это уравнение с уравнением равновесия, получим $N_{6-5} = -28.286$ кН и $N_{7-8} = 14.143$ кН.

Эпюра нормальных сил показана на рис. 71, б.

12. Проверяем равновесие рамы в целом. Для этого убираем опорные связи и их действие заменяем внутренними силовыми факторами в сечениях (рис. 71, в). Значения этих факторов определяем по эпюрам M_{OK}, Q, N .

$$\sum X = 0; 20.13 + 52.89 + 16.97 - 90 = 89.99 - 90 \approx 0;$$

$$\sum Y = 0; 47.56 + 28.29 + 14.14 - 30 \cdot 3 = 89.99 - 90 \approx 0;$$

$$\sum m_1 = 0; 44.0128 + 14.14 \cdot 3 - 16.97 \cdot 9 + 90 \cdot 3 - 30 \cdot \frac{3^2}{2} - 93.1586 + 28.29 \cdot 3 - 60.3947 = 441.30 - 441.28 \approx 0.$$

$$\text{Погрешность} \frac{0.02}{441.28} \cdot 100\% = 0.004\%. \text{ Рама рассчитана верно.}$$

4.2. Матричный алгоритм метода перемещений

Выведем формулу, выражающую алгоритм метода перемещений. Для этого будем использовать матричные соотношения предыдущего параграфа.

Окончательный вектор моментов, если известен вектор перемещений \vec{Z} , получаем по (4.29). При этом стрелки участков с криволинейным очертанием эпюр будем учитывать отдельно.

$$\vec{M} = \vec{M}_P + L_m \cdot \vec{Z}.$$

Вектор перемещений определяем, решая систему канонических уравнений метода перемещений (4.28). Если подставить (4.28) в (4.29), то получим

$$\vec{M} = \vec{M}_P - L_m \cdot R^{-1} \cdot \vec{R}_P. \quad (4.30)$$

Подставляя сюда выражения (4.25) и (4.27), получим окончательно

$$\vec{M} = \vec{M}_P + L_m \cdot (L_m^t \cdot B \cdot L_m)^{-1} \cdot L_m^t \cdot B_f \cdot \vec{M}_P^{of} \quad (4.31)$$

4.2.1. Аналогия матричных алгоритмов метода сил и метода перемещений

Сравним формулы для векторов окончательных эпюр моментов при расчёте по методу перемещений (4.31) и при расчёте по методу сил (3.16)

$$\vec{M} = \vec{M}_P - L_m \cdot (L_m^t \cdot B \cdot L_m)^{-1} \cdot L_m^t \cdot B_f \cdot \vec{M}_P^f.$$

Структура обеих формул совершенно одинаковая — она отражает общую логику рассуждений при расчёте статически неопределимых систем:

1. Заданная система разделяется на участки. Начало и конец каждого участка отмечается сечением со своим номером. Для каждого участка назначается правило знаков для ординат эпюр моментов в отмеченных сечениях.

2. Выбирается основная система — для каждого метода своя.

3. Вводятся векторы неизвестных (\vec{X} — в методе сил, \vec{Z} — в методе перемещений).

4. В основной системе формируется матрица влияния моментов L_m путём построения единичных эпюр — эпюр моментов от единичных факторов, совпадающих по направлению с неизвестными.

5. В основной системе строится эпюра от нагрузки \vec{M}_P .

6. Только в методе перемещений строится эпюра моментов M_P от нагрузки в статически определимой системе, полученной из заданной путём отбрасывания лишних связей.

7. Для каждого участка формируется матрица податливости B_k , которые затем образуют матрицу податливости всей системы B .

8. Там, где указан индекс f , в соответствующей матрице учитывается влияние стрелки f .

Далее расчёт проводится совершенно одинаково, используя действия матричной алгебры.

4.2.2. Программа SETAPR.EXE для метода перемещений.

Пример

Программа SETAPR поддерживает возможность расчёта статически неопределимых систем не только методом сил, как описано в п. 3.1.3, но и методом перемещений. Совместить два метода в одной программе удалось, используя аналогию, указанную в п. 4.2.1.

Подготовка исходных данных проводится так же, как это указано в п. 3.1.3, но при расчёте по методу перемещений в файле APR2.DAT в режиме EDIT кроме пяти массивов, смысл которых описан в п. 3.1.3, записывается шестой массив — элементы вектора грузовых реакций R_P в основной системе метода перемещений, которые студент должен определить статическим способом, указанным в п. 4.1.4.

Таким образом, по существу при расчёте по методу перемещений программа выполняет алгоритм, учитывающий

то, что вектор \vec{R}_P предварительно найден и включён в файл исходных данных,

$$\vec{M} = \vec{M}_P - L_m \cdot (L_m^t \cdot B \cdot L_m)^{-1} \cdot \vec{R}_P. \quad (4.32)$$

Следует также отметить, что при программировании формул (3.16) и (4.32) в памяти ПЭВМ не хранится матрица B всей системы, а для каждого участка производится перемножение трёх сомножителей в формуле Мора и затем суммирование по всем участкам системы. Такой приём позволяет избежать засорения оперативной памяти большим числом нулей, находящихся в матрице B .

ПРИМЕР 1

Проведём расчёт рамы (рис. 66, а) с помощью программы SETAPR.EXE.

В файле APR1.DAT записываем следующую исходную информацию:

```
name
0 0 0 -1 0.666666 -1.333333 0.666666 -0.333333
-0.333333 0 0 0 -0.666666 0.666666 0.166666 -0.166666
```

В файле APR2.DAT в первой строке записываем массив коэффициентов податливостей участков по формуле

$$i_k = \frac{\ell_k \cdot EJ_c}{6EJ_k} \text{ и далее, как указано (п. 3.1.3):}$$

```
0.5 0.5 0.5 1
2 2 2 2
2
33.75
0 0 0 -33.75 0 0 0 0
33.75 90
```

Запускаем программу, хранящуюся в файле setapr.exe. В процессе работы происходит следующий диалог:

степень статической неопределимости — в ответ вводится 2;

число участков системы — в ответ вводится число 4;

число сечений — в ответ вводится число 8;

число участков с равномерно распределенной нагрузкой — вводится число 1;

число участков с двумя расчетными сечениями — вводится 4;

число участков с одним расчетным сечением — вводится 0;

признак метода расчета (метод сил — 0; метод перемещений — 1) — вводится 1.

После работы программа открывает в каталоге C:\X_Z файл name.res, в который выводятся искомые векторы \vec{Z}, \vec{M}

$$\vec{M} = [60.3947 \quad 0 \quad 0 \quad 7.6974 \quad 93.1586 \quad -65.5277 \quad -57.8283 \quad 44.0128 \quad];$$

$$\vec{Z} = [-41.44768 \quad -181.18421] .$$

Окончательная эпюра моментов показана на рис. 69, а. Вектор перемещений вычислен с точностью до множи-

теля $\frac{1}{EJ}$.

Канд. техн. наук, проф. Л.Ю. КУЗЬМИН,
канд. техн. наук, проф. В.Н. СЕРГИЕНКО

СТРОИТЕЛЬНАЯ МЕХАНИКА

Решение задач на ЭВМ
Методические указания

Редактор *Г.В. Тимченко*
Компьютерная верстка *Н.Ф. Цыганова*

Тип. зак.	Изд. зак. 363.	Тираж 5 00 экз.
Подписано в печать 3.12.02	Гарнитура Times.	Офсет
Усл. печ. л. 8,5	Допечатка тиража	Формат 60x90 ¹ / ₁₆

Издательский центр РГОТУПС,
125993, Москва, Часовая ул., 22/2