

МПС РОССИИ  
РОССИЙСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ОТКРЫТЫЙ  
ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ПУТЕЙ СООБЩЕНИЯ

---

**19/16/1**

Одобрено кафедрой  
«Автомеханика и телемеханика  
на железнодорожном  
транспорте»

Утверждено  
деканом факультета  
«Управление процессами  
перевозок»

## **ОСНОВЫ ЭЛЕКТРОДИНАМИКИ НАПРАВЛЯЮЩИХ СИСТЕМ**

Рабочая программа  
и задание на контрольную работу  
с методическими указаниями  
для студентов IV курса

специальности

210700. АВТОМАТИКА, ТЕЛЕМЕХАНИКА  
И СВЯЗЬ НА ЖЕЛЕЗНОДОРОЖНОМ ТРАНСПОРТЕ (АТС)



Москва – 2003

Разработана на основании примерной учебной программы данной дисциплины, составленной в соответствии с государственными требованиями к минимуму содержания и уровню подготовки инженера по специальности 210700 «Автоматика, телемеханика и связь на железнодорожном транспорте».

С о с т а в и т е л и — канд. техн. наук, доц. А.В. ГОРЕЛИК,  
доц. С.П. КОРЯКОВЦЕВ

Курс — IV

Всего часов — 75 ч.

Лекционные занятия — 8 ч.

Практические занятия — 4 ч.

Контрольная работа (количество) — 1

Самостоятельная работа — 48 ч.

Зачет (количество) — 1

## РАБОЧАЯ ПРОГРАММА

---

### 1. ЦЕЛЬ И ЗАДАЧИ ДИСЦИПЛИНЫ

#### 1.1. Цель преподавания дисциплины

На железнодорожном транспорте для передачи информации в системах управления и связи и для энергоснабжения устройств железнодорожной автоматики, телемеханики и других объектов используются воздушные, кабельные и волоконно-оптические линии передачи, волноводы и другие виды направляющих систем.

В рамках данной дисциплины углубленно рассматриваются несколько разделов курса “Линии железнодорожной автоматики, телемеханики и связи”. В связи с этим материал этих разделов, при выборе дисциплины “Основы электродинамики направляющих систем” в качестве дисциплины по выбору, может не рассматриваться при изучении обязательной дисциплины “Линии железнодорожной автоматики, телемеханики и связи”.

Целью дисциплины является углубленное изучение основ теории электродинамики направляющих систем, конструкции и физических свойств волноводов, световодов и проводных систем.

Материал, излагаемый по данной дисциплине, увязан с материалом учебных курсов физики, высшей математики, теоретических основ электротехники.

На основных положениях данной дисциплины основывается изучение специальных курсов специализаций 210702 «Системы передачи информации» и 210703 «Радиотехнические системы железнодорожного транспорта»: Радиотехнические системы на железнодорожном транспорте, Антенны и распространение радиоволн, Проводная и радиорелейная связь на железнодорожном транспорте.

## 1.2. Задачи изучения дисциплины

Изучив дисциплину, студент должен:

### 1.2.1. Иметь представление:

- о тенденциях развития техники направляющих систем и перспективах их применения на железнодорожном транспорте,
- о назначении основных видов и типов линейных сооружений автоматики, телемеханики и связи, а также электроснабжения на железнодорожном транспорте;

### 1.2.2. Знать и уметь использовать:

- конструктивные характеристики, электрические параметры, назначение и области эффективного применения различных видов направляющих систем;
- основные закономерности распространения электромагнитной энергии по направляющим системам.

---

## 2. СОДЕРЖАНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ

### ВВЕДЕНИЕ

Значение линий связи в системах управления работой железнодорожного транспорта.

---

### Раздел 1. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН ПО НАПРАВЛЯЮЩИМ СИСТЕМАМ

#### 1.1. Виды направляющих систем и сети связи

Разновидности направляющих систем, их основные свойства и область применения. [1, с. 7–10, 74–75]

#### 1.2. Основы электродинамики направляющих систем

Природа электромагнитного поля. Распространение электромагнитных волн по направляющим системам. Классифи-

кация сред и их свойства. Вектор Умова-Пойнтинга. Основные уравнения электродинамики и их физический смысл. Типы и классы электромагнитных волн. Режимы передачи по направляющим системам и их описание уравнениями Максвелла. Основные уравнения электромагнитного поля для гармонических процессов в комплексной форме. Волновые уравнения в векторной форме и их физический смысл. Скорость распространения электромагнитной волны в различных средах. Уравнение однородной линии. Волновые уравнения в цилиндрической системе координат и их физический смысл. Описание электромагнитных процессов в проводных системах (поверхностного эффекта и эффекта близости) с помощью волновых уравнений. Потери энергии в направляющих системах. Определение мощности потерь в металле на основе волновых уравнений в цилиндрической системе координат. [1, с. 10–21, 74–75]

---

### РАЗДЕЛ 2. ПЕРЕДАЧА СИГНАЛОВ ПО НАПРАВЛЯЮЩИМ СИСТЕМАМ

#### 2.1. Передача сигналов по проводным системам

Первичные и вторичные параметры двухпроводных цепей. Их физический смысл. Методика определения значений первичных параметров передачи  $R$  и  $L$  через параметры среды. [1, с. 26–41, 54].

#### 2.2. Передача сигналов по волноводным линиям. Лекции по разделам I и II.

Физические процессы в волноводах. Особенности волны  $H_{01}$  в цилиндрическом волноводе. [1, с. 18–20].

#### 2.3. Передача сигналов по оптическим кабелям

Принцип действия волоконных световодов. Уравнения геометрической оптики. Лучевой подход. Электромагнитный подход. Типы и число направляющих волн в световоде.

Одномодовые и многомодовые световоды. Распространение света по градиентному оптическому волокну. Достоинства градиентного оптического волокна. Пропускная способность и параметры передачи волоконных световодов. [1, с. 87–100].

### 3. ВИДЫ РАБОТ С РАСПРЕДЕЛЕНИЕМ ВРЕМЕНИ

Лекционные занятия — 8 ч.

Практические занятия — 4 ч.

Контрольная работа (количество) — 1

Дифференцированный зачет (количество) — 1

### 4. ПРИМЕРНЫЙ ПЕРЕЧЕНЬ ТЕМ ЛЕКЦИОННЫХ ЗАНЯТИЙ (8 ч)

№ п/п	Наименование темы	Количество часов
1	Общие понятия о видах направляющих систем	1
2	Элементы теории распространения электромагнитных волн по направляющим системам	3
2.1	Природа электромагнитного поля. Классификация сред и их свойства. Электромагнитные процессы в проводниках и диэлектриках. Вектор Умова-Пойнтинга. Классы и типы электромагнитных волн. Физические процессы в волноводах. Особенности волны $H_{01}$ в цилиндрическом волноводе.	2
2.2	Основные уравнения электродинамики и их физический смысл. Режимы передачи по направляющим системам. Волновые уравнения в векторной форме и в цилиндрической системе координат.	1
3	Передача сигналов по направляющим системам	4
3.1	Первичные и волновые параметры проводных систем. Исходные принципы расчета направляющих систем. Методика определения первичных параметров передачи через параметры среды.	2
3.2	Передача сигналов по оптическим кабелям. Электромагнитный и лучевой подходы. Типы оптических волокон. Уравнения геометрической оптики.	2

### 5. ПРИМЕРНАЯ ТЕМАТИКА ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАНЯТИЙ

5.1. Расчет плотности тока в различных точках сечения проводника.

5.2. Расчет мощности энергии, передаваемой по различным типам направляющих систем.

### 6. ИНФОРМАЦИОННО-МЕТОДИЧЕСКОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ

#### 6.1. Перечень обязательной литературы

1. Виноградов В.В., Кузьмин В.И., Гончаров А.Я. Линии автоматики, телемеханики и связи на железнодорожном транспорте: Учебник для вузов. — М.: Транспорт, 1990.

#### 6.2. Перечень рекомендуемой литературы

1. Гроднев И.И., Верник С.М., Кончановский Л.Н. Линии связи: Учебник для вузов. — М.: Радио и связь, 1995.

2. Гроднев И.И. Волоконно-оптические линии связи. Учеб. пос. для вузов. — М.: Радио и связь, 1990.

3. Гроднев И.И., Курбатов Н.Д. Линии связи: Учебник для вузов. — М.: Связь, 1980.

4. Козлов Л.Н., Кузьмин В.И. Линии автоматики, телемеханики и связи на железнодорожном транспорте. — М.: Транспорт, 1981.

5. Витевский В.Б., Павловская Э.А. Электромагнитные волны в технике связи. Учеб. пос. для вузов. — М.: Радио и связь, 1995.

## ЗАДАНИЕ НА КОНТРОЛЬНУЮ РАБОТУ С МЕТОДИЧЕСКИМИ УКАЗАНИЯМИ

### ЗАДАЧА 1

По стальному проводу [электрическая проводимость  $\gamma = 10^7$  (Ом·м)<sup>-1</sup>; относительная магнитная проницаемость  $\mu = 10^3$ ] диаметром  $2a = 6,04$  мм течет синусоидальный ток  $I = 100$  А частотой  $f$  Гц.

Определить плотность тока на поверхности и на оси провода.

Вариант численного значения частоты тока определяется по формуле:

$$f = 1,38866 \cdot n^2 \text{ Гц} ,$$

где  $n$  — последняя цифра шифра студента (цифра 0 соответствует  $n = 10$ ).

Привести вывод формул для определения плотности тока  $\delta$  и напряженности  $H$  в любой точке сечения провода, не учитывая влияния обратного провода на поле в прямом проводе. При решении задачи использовать цилиндрическую систему координат.

Решение задачи следует начать с обязательной проверки соотношения между током проводимости и током смещения в данном проводнике, что является важным обоснованием для всех последующих рассуждений.

*Примечание:* Если две последние цифры шифра студента оканчиваются на 46, для выбора вариантов следует использовать комбинацию 64, поскольку решение на 46 полностью приведены в задании на контрольную работу в виде примеров.

### Методические указания

Рассмотрим особенности распространения электромагнитной волны в проводящей среде с проводимостью  $\gamma$  и магнитной проницаемостью  $\mu_a$ .

Обратимся к первому и второму уравнениям Максвелла, записанным в комплексной форме для синусоидально изменяющихся во времени  $E$  и  $H$ :

$$\text{rot } H = \gamma E + j\omega\epsilon_a E \quad \text{и} \quad \text{rot } E = -j\omega\mu_a H .$$

В проводящей среде даже при очень высоких частотах произведение  $\omega\epsilon_a$  много меньше проводимости  $\gamma$ . Поэтому с большой степенью точности слагаемым  $j\omega\epsilon_a E$  в первом уравнении Максвелла для проводящих сред можно пренебречь. Следует отметить, что в настоящее время наука не располагает точными данными о числовом значении электрической проницаемости  $\epsilon$  для металлов. Имеются лишь сведения, что порядок  $\epsilon$  для металлов такой же, как и для большинства диэлектриков (т.е. от нескольких единиц до нескольких десятков).

Вектор плотности тока  $\delta$ , записанный в комплексной форме для синусоидально изменяющихся во времени  $\delta$  и тока  $I$ , удобно направить в положительном направлении оси  $z$ , поэтому  $\delta = z_0 \delta$ .

Таким образом первое и второе уравнения Максвелла для проводящей среды приобретают вид:

$$\text{rot } H = \gamma E = \delta \quad \text{rot } E = -j\omega\mu_a H ,$$

или, умножив последнее на  $\gamma$ ,

$$\text{rot } \delta = -j\omega\gamma\mu_a H .$$

Возьмем ротор от последнего уравнения:

$$\text{rot rot } \delta = \text{grad div } \delta - \nabla^2 \delta = -j\omega\gamma\mu_a \delta ,$$

или, считая процесс течения тока установившимся, т.е.  $\text{div } \delta = 0$  и подставляя  $\delta = z_0 \delta$ , перейдем к скалярному уравнению

$$\nabla^2 \delta = j\omega\gamma\mu_a \delta ,$$

которое и требуется решить в цилиндрической системе координат. Учитывая вид оператора  $\nabla^2 = \text{div grad}$  в этой системе координат, а также то, что  $\delta$  от  $\alpha$  и от  $z$  не зависит (из соображений симметрии), получим:

$$\frac{1}{r} \left( \frac{d\delta}{dr} + r \frac{d^2\delta}{dr^2} \right) = j\omega\gamma\mu_a \delta \quad \text{или} \quad \frac{d^2\delta}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\delta}{dr} = j\omega\gamma\mu_a \delta .$$

Введем обозначение  $q^2 = -j\omega\mu_a$ , тогда уравнение примет вид:

$$\frac{d^2\delta}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\delta}{dr} + q^2 \delta = 0 \quad \text{или} \quad \frac{d^2\delta}{d(qr)^2} + \frac{1}{qr} \frac{d\delta}{d(qr)} + \delta = 0 .$$

Последнее уравнение является частным случаем уравнения Бесселя относительно аргумента  $x = qr$  и функции  $y = \delta$ . Его решение имеет вид:

$$\delta = AJ_0(qr) + BN_0(qr) ,$$

где  $A$  и  $B$  — постоянные интегрирования;

$J_0(qr)$  — функция Бесселя нулевого порядка первого рода;

$N_0(qr)$  — функция Бесселя нулевого порядка второго рода.

Последняя обращается в бесконечность на оси провода, т.е. при  $r = 0$ , хотя из очевидных физических соображений ясно, что плотность тока должна быть всюду конечна, в том числе и на оси провода. Поэтому принимаем  $B = 0$ . Следовательно, решение имеет вид:

$$\delta = AJ_0(qr) .$$

Используя второе уравнение Максвелла, определим напряженность магнитного поля:

$$\mathbf{H} = \frac{1}{q^2} \text{rot } \boldsymbol{\delta} = \boldsymbol{\alpha}_0 \left( -\frac{1}{q^2} \frac{d\delta}{dr} \right) = \boldsymbol{\alpha}_0 H ;$$

Отсюда

$$H = -\frac{1}{q^2} \frac{d}{dr} [AJ_0(qr)] = -\frac{A}{q} \frac{d[J_0(qr)]}{d(qr)} = -\frac{A}{q} [-J_1(qr)] = \frac{A}{q} J_1(qr) ,$$

где  $J_1(qr)$  — функция Бесселя первого рода первого порядка.

Определим постоянную интегрирования  $A$ , для чего только что полученное выражение для  $H$ , взятое на поверхности провода (при  $r = a$ ) приравняем к известному выражению для  $H$  из закона полного тока:

$$\frac{A}{q} J_1(qa) = \frac{I}{2\pi a} , \quad \text{откуда} \quad A = \frac{qI}{2\pi a J_1(qa)} .$$

Подставим найденное значение  $A$  в полученные выше решения для  $\delta$  и  $H$ :

$$\delta = \frac{qI J_0(qr)}{2\pi a J_1(qa)} ; \quad H = \frac{I J_1(qr)}{2\pi a J_1(qa)} .$$

С помощью этих формул можно определить комплекс плотности тока  $\delta$  и комплекс напряженности поля  $H$  в любой точке сечения провода. Радиус  $r$  может принимать значения от 0 до  $a$ . Для точек на оси провода  $r = 0$ ; для точек на поверхности провода  $r = a$ .

Так как  $J_0(0) = 1$ , то плотность тока на оси провода:

$$\delta_0 = \frac{qI}{2\pi a J_1(qa)} .$$

Введем это выражение в формулу решения:  $\delta = \delta_0 J_0(qr)$ .

Тогда плотность тока на поверхности провода:  $\delta_a = \delta_0 J_0(qa)$ .

Очевидно, что произведение  $qr$  есть комплексное число:

$$qr = r \sqrt{\omega\mu_a} \sqrt{-j} .$$

Бесселевы функции от комплексного аргумента также являются комплексными и могут быть представлены в показательной форме:

$$J_0(qr) = b_0 e^{j\beta_0} ; \quad J_1(qr) = b_1 e^{j\beta_1} ,$$

где  $b_0$  — модуль;

$\beta_0$  — аргумент функции  $J_0(qr)$ ;

$b_1$  — модуль;

$\beta_1$  — аргумент функции  $J_1(qr)$ , которые определяются по значению  $r \sqrt{\omega\mu_a}$  с помощью табл. 1.

При составлении этой таблицы наличие множителя  $\sqrt{-j}$  в составе аргумента  $qr$  уже учтено.

**Пример решения**

Пусть последняя цифра шифра студента  $n = 6$ .

1. Определим, во сколько раз ток проводимости в стали будет больше тока смещения. Положим:  $\varepsilon = 10$ ;  $\omega = 100$  рад / с. Тогда отношение:

Таблица 1

Таблица модулей и аргументов функций  $J_0(qr)$  и  $J_1(qr)$ 

$r\sqrt{\omega\mu_a}$	$b_0$	$\beta_0$ , град	$b_1$	$\beta_1$ , град
0	1	0	0	- 45,00
1	1,015	14,22	0,501	- 37,84
2	1,229	52,28	1,041	- 16,73
3	1,95	96,52	1,80	15,71
4	3,439	138,19	3,173	53,90
5	6,231	178,93	5,812	93,55
6	11,501	219,62	10,850	133,45
7	21,548	260,29	20,50	173,51
8	40,82	300,92	39,07	213,69
9	77,96	341,52	74,97	253,95
10	149,8	382,10	144,58	294,27

$$\frac{\gamma}{\omega\epsilon_a} = \frac{\gamma}{\omega\epsilon_0\epsilon} = \frac{10^7}{100 \cdot 8,86 \cdot 10^{-12} \cdot 10} = 1,129 \cdot 10^{15},$$

где электрическая постоянная  $\epsilon_0 = 8,86 \cdot 10^{-12}$  Ф/м.

Увеличение частоты  $\omega$  даже на несколько порядков не существенно скажется на результате, а именно: в проводнике ток проводимости во много раз больше тока смещения.

2. Определим частоту переменного тока  $f = 1,38866 \cdot 6^2 = 49,992$  Гц.

3. Рассчитаем параметр  $\sqrt{\omega\mu_a} = \sqrt{2\pi f \mu_a} = \sqrt{2\pi f \mu_0 \mu} = \sqrt{2\pi \cdot 49,992 \cdot 10^7 \cdot 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 10^3} = 1986,76$  м<sup>-1</sup>. Здесь учтено, что  $\omega = 2\pi f$ ,  $\mu_a = \mu_0 \cdot \mu$  и что  $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$  Гн/м;

4. Комплексная величина  $q = 1986,76\sqrt{-j} = 1986,76 e^{-j 45^\circ}$ ;

5. Выражение  $a\sqrt{\omega\mu_a} = 0,00302 \cdot 1986,76 = 6,000$ .

6. По табл. 1 найдем:

$$J_0(qa) = J_0(6\sqrt{-j}) = 11,501 e^{j 219,62^\circ}; \quad b_0 = 11,501; \quad \beta_0 = 219,62^\circ;$$

$$J_1(qa) = J_1(6\sqrt{-j}) = 10,850 e^{j 133,45^\circ}; \quad b_1 = 10,850; \quad \beta_1 = 133,45^\circ;$$

$$J_0(0) = 1 e^{j 0^\circ}; \quad b_0 = 1; \quad \beta_0 = 0^\circ;$$

$$J_1(0) = 0 e^{-j 45^\circ}; \quad b_1 = 0; \quad \beta_1 = - 45,00^\circ.$$

7. Определим плотность тока на оси провода:

$$\delta_0 = \frac{qI}{2\pi a J_1(qa)} = \frac{1986,76 e^{-j 45^\circ} \cdot 100}{2\pi \cdot 0,00302 \cdot 10,850 e^{j 133,45^\circ}} =$$

$$= 96,500 \cdot 10^4 e^{-j 178,45^\circ} \text{ А/м}^2.$$

8. Определим плотность тока на поверхности провода:

$$\delta_a = \delta_0 J_0(qa) = 96,5 \cdot 10^4 e^{-j 178,45^\circ} \cdot 11,501 e^{j 219,62^\circ} =$$

$$= 1109,85 \cdot 10^4 e^{j 41,17^\circ} \text{ А/м}^2$$

## ЗАДАЧА 2

Поперечные размеры прямоугольного волновода по осям  $x$  и  $y$  соответственно  $A$  х  $B$  см<sup>2</sup> ( $A < B$ ), а вдоль направления оси  $z$  он неограниченно протяжен.

Какие типы электромагнитных волн  $H$  (т.е.  $TE$ ) могут распространяться по этому волноводу в направлении оси  $z$  при длине волны в свободном пространстве  $\lambda = 10$  см?

Определить длину волны  $\Lambda$ , распространяющейся по волноводу.

Установить справедливость следующих соотношений:

$$\lambda_z < \lambda < \Lambda; \quad v_\phi > v; \quad \Lambda \cdot \lambda_z = \lambda^2; \quad v_\phi \cdot v_z = v^2;$$

где  $v$  — скорость волны в свободном пространстве;

$v_\phi$  — фазовая скорость в направлении  $z$ ;

$v_z$  — скорость распространения сигнала, энергии в направлении  $z$ .

Определить:  $\lambda_z$ ; частоту электромагнитных колебаний  $f$ , считая что  $v = c$  — скорости света в вакууме;  $v_\phi$ ;  $v_z$ .

Размер  $A$  волновода определяется по предпоследней значащей цифре шифра (нули опускаются), размер  $B = 9$  см. для всех вариантов.

*Примечание:* Если две последние цифры шифра студента оканчиваются на 46, для выбора вариантов следует использовать комбинацию 64, поскольку решение на 46 полностью приведены в задании на контрольную работу в виде примеров.

### Методические указания

Рассмотрим прямоугольный волновод с размерами  $A$  и  $B$  по осям  $x$  и  $y$  (пусть  $A < B$ ), неограниченно протяженный в направлении  $z$ . Начало декартовой системы координат расположим на одном из ребер волновода. В случае волны, распространяющейся в сторону  $+z$ , возможные решения для электрической составляющей электромагнитного поля имеют вид:

$$\begin{aligned} E_x &= E_1 \cos(k_x x) \cdot \sin(k_y y) \cdot e^{-jk_z z}; \\ E_y &= E_2 \sin(k_x x) \cdot \cos(k_y y) \cdot e^{-jk_z z}; \\ E_z &= E_3 \sin(k_x x) \cdot \sin(k_y y) \cdot e^{-jk_z z}. \end{aligned}$$

Необходимо помнить граничные условия для идеально проводящих стенок волновода: касательная к поверхности составляющая вектора напряженности электрического поля и нормальная составляющая вектора напряженности магнитного поля на идеально проводящей поверхности равны нулю, а касательная к поверхности составляющая вектора напряженности магнитного поля и нормальная составляющая вектора напряженности электрического поля на идеально проводящей поверхности имеют экстремумы. Предложенные решения удовлетворяют этому в случае, если составляющие волнового вектора  $\mathbf{k}$  будут иметь следующие значения:

$$k_x = l \pi / A; \quad k_y = m \pi / B.$$

При этом должно выполняться  $k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = k^2 = (2\pi/\lambda)^2$

Для того чтобы электромагнитные волны распространялись в направлении  $z$  без затухания, необходимо, чтобы  $k_z$  было вещественным, т.е. чтобы выполнялось неравенство

$$k_z^2 = (2\pi/\lambda)^2 - (l\pi/A)^2 - (m\pi/B)^2 > 0$$

Последнее условие показывает, что в волноводе могут распространяться колебания, длина волны которых в свободном пространстве меньше некоторого критического значения ( $k_z = 0$ ):

$$\lambda < \lambda_{кр} = \frac{2}{\sqrt{(l/A)^2 + (m/B)^2}}.$$

Критическая длина волны зависит от типа устанавливаемого поля, определяемого характеристическими числами  $l$  и  $m$ . Если  $A < B$ , то наибольшее значение критической длины волны соответствует числам  $l = 0$  и  $m = 1$  (оба числа не могут одновременно обращаться в нуль).

При этом

$$\lambda_{кр} = 2B.$$

Зная  $z$ -ю составляющую волнового вектора, находим длину волны, распространяющейся по волноводу,

$$\Lambda = 2\pi/k_z.$$

Сопоставляя полученные соотношения, можно заключить, что эта длина всегда больше длины  $\lambda$  свободной волны, поскольку

$$\Lambda = \frac{\lambda}{\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_{кр}}\right)^2}}.$$

Соответственно фазовая скорость волны, распространяющейся в волноводе,  $v_\phi$  всегда больше скорости в свободном пространстве

$$v_\phi = \Lambda f > v = \lambda f.$$

Схематически соотношение между  $\lambda$  и  $\Lambda$  показано на рисунке, где изображена волна, распространяющаяся по волноводу (ее два гребня и впадина) и многократно отражающаяся от нижней и верхней стенок.





Длина волны  $\lambda$  соответствует расстоянию между гребнями вдоль ломаной прямой траектории движения волны. Длина волны в волноводе  $\Lambda$  показана на рисунке. На рисунке не изображена  $\lambda_z$ , которая показывает, насколько продвигается гребень вдоль направления  $z$ . Этот путь меньше не только длины  $\Lambda$ , но и длины свободной волны  $\lambda$ , поскольку является проекцией последней на ось  $z$ . С ростом угла  $\alpha$  растет длина волны в волноводе, но уменьшается продвижение в направлении оси  $z$  за один период, т.е. длина  $\lambda_z$ . Поскольку  $\lambda_z = \lambda \cos\alpha$  и  $\Lambda = \lambda / \cos\alpha$ , то перемножая эти выражения почленно получим простое соотношение между тремя длинами волн:

$$\Lambda \lambda_z = \lambda^2 .$$

Если разделить обе части равенства на  $T^2$ , то получим соотношение для скоростей:

$$v_\phi v_z = v^2,$$

где  $v$  — скорость волны в свободном пространстве;  
 $v_\phi$  — фазовая скорость в направлении  $z$ ;  
 $v_z$  — скорость распространения сигнала, энергии в направлении  $z$ .

Множество разных типов волн в волноводах, описываемых в самой общей форме приведенными выше решениями для электрической составляющей поля и уравнением Максвелла  $\mathbf{H} = (j/\omega\mu_0) \text{rot } \mathbf{E}$  для его магнитной составляющей, разделяются на два класса. К одному относятся волны, не имеющие продольной, т.е.  $z$ -й, составляющей электрического вектора ( $E_z = 0$ ); их называют поперечноэлектрическими  $TE$  или магнитными  $H$ . К другому классу относятся волны, не имеющие продольной магнитной составляющей; их называют поперечномагнитными  $TM$  или электрическими  $E$ .

Дальнейшая классификация типов электромагнитных волн в волноводе определяется значениями характеристических чисел; говорят о волне  $TE_{lm}$ , если в ней  $E_z = 0$ , а характеристические числа имеют значения  $l$  и  $m$ , или о волне  $TM_{lm}$ , если  $H_z = 0$ .

Так например, электрический вектор простейшей волны типа  $TE_{01}$  определяется формулой:

$$\mathbf{E} = E_x = E_1 \sin(\pi y/B) e^{-jk_z z} (E_y = E_z = 0),$$

а магнитный вектор имеет  $y$ -ю и  $z$ -ю составляющие:

$$\mathbf{H} = [k_z E_1 \sin(\pi y/B) y_0 - j k_y E_1 \cos(\pi y/B) z_0] e^{-jk_z z} / \omega\mu_0,$$

как это следует из условия  $k_x = 0$ , поскольку  $l = 0$  и  $k_y = \pi/B$ , поскольку  $m = 1$ .

Для волн типа  $TE_{02}$  картина поля отличается тем, что вдоль оси  $y$  укладывается не одна полуволна синусоиды  $E_x$  (и соответствующего магнитного поля), а две.

#### Пример решения

Пусть предпоследняя цифра шифра студента  $n = 4$ . Таким образом размер  $A = 4$  см.

1. Поперечные размеры волновода  $4 \times 9$  см<sup>2</sup>. По формуле для  $\lambda_{кр}$ , полагая  $A = 4$  см и  $B = 9$  см находим ряд значений  $\lambda_{кр}$  для разных значений  $l$  и  $m$ :

$lm$	01	02	10	11	12	20	21
$\lambda_{кр}$ , см	18	9	8	7,31	5,98	4	3,9

Следовательно, по волноводу могут распространяться только волны типа  $TE_{01}$ , для которых  $\lambda = 10$  см  $<$   $\lambda_{кр} = 18$  см.

2. Определим длину электромагнитной волны  $\Lambda$ , распространяющейся по волноводу:

$$\Lambda = \frac{\lambda}{\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_{кр}}\right)^2}} = \frac{10}{\sqrt{1 - \left(\frac{10}{18}\right)^2}} = 12 \text{ см} .$$

3. Определим  $\lambda_z = \frac{\lambda^2}{\Lambda} = \frac{10^2}{12} = 8,33$  см. Убедимся в справедливости соотношения между тремя длинами волн:

$$\lambda_z = 8,33 \text{ см} < \lambda = 10 \text{ см} < \Lambda = 12 \text{ см} .$$

4. Частота электромагнитных колебаний, при условии  $v = c = 3 \cdot 10^8$  м/с (скорость света в вакууме и воздухе):

$$f = \frac{c}{\lambda} = \frac{3 \cdot 10^8}{0,1} = 3 \cdot 10^9 \text{ Гц} = 3 \text{ ГГц.}$$

5. Определим  $v_\phi = \Lambda \cdot f = 0,12 \cdot 3 \cdot 10^9 = 3,6 \cdot 10^8$  м/с.

6. Определим  $v_z = \frac{c^2}{v_\phi} = \frac{(3 \cdot 10^8)^2}{3,6 \cdot 10^8} = 2,5 \cdot 10^8$  м/с, или  $v_z = \lambda_z \cdot f = 0,0833 \cdot 3 \cdot 10^9 = 2,5 \cdot 10^8$  м/с. Убедимся в справедливости соотношения между тремя скоростями пространства волны:

$$v_z = 2,5 \cdot 10^8 \text{ м/с} < v = c = 3 \cdot 10^8 \text{ м/с} < v_\phi = 3,6 \cdot 10^8 \text{ м/с.}$$

### ЗАДАЧА 3

Какую максимальную мощность можно передавать по волноводу предыдущего примера (прямоугольный волновод размера  $A \times B$  см) при  $\lambda = 10$  см?

Можно считать, что предел мощности определяется электрической прочностью воздуха: напряженность электрического поля должна быть всего порядка 5 кВ/см, для того, чтобы существовал достаточный запас прочности.

Предполагается отсутствие отраженных волн вдоль оси  $z$ .

Изобразить структуру простейшей волны  $TE$  в прямоугольной декартовой системе координат, в проекциях на плоскости  $xOy$  и  $yOz$ .

*Примечание:* Если две последние цифры шифра студента оканчиваются на 46, для выбора вариантов следует использовать комбинацию 64, поскольку решение на 46 полностью приведены в задании на контрольную работу в виде примеров.

#### Методические указания

Определив тип простейшей  $TE$  электромагнитной волны, распространяющейся по волноводу в предыдущей задаче, следует определить и все комплексные составляющие ее электрического вектора, т.е.  $E_x$ ,  $E_y$ ,  $E_z$ , что и сделано в

конце методических указаний к задаче 2. Магнитное поле этой волны легко найти по уравнению Максвелла

$$\mathbf{H} = (j/\omega\mu_0) \text{rot } \mathbf{E}$$

и это необходимо сделать вручную, используя выражение для оператора rot в декартовой системе координат (см. Приложение). Результат следует сравнить со значением, полученным в предыдущей задаче.

Продольная составляющая вектора Пойнтинга  $P_z = E_x \cdot H_y^*$  является вещественной величиной, имея размерность кВт/см<sup>2</sup>. Искомая мощность определяется интегрированием  $P_z$  по всему сечению волновода.

#### Пример решения

Положим, что поперечные размеры волновода  $4 \times 9$  см<sup>2</sup>.

1. Для волны типа  $TE_{01}$  магнитный вектор имеет  $y$  и  $z$  — составляющие.

Интересующая нас  $y$  — составляющая:

$$H_y = k_z E_1 \sin(\pi y/B) \cdot e^{-jk_z z} / \omega\mu_0.$$

Ее комплексно сопряженное значение определяется сменой знака у мнимой единицы ( $j$ ) и сопряжением комплексной величины  $E_1$ :

$$H_y^* = k_z E_1^* \sin(\pi y/B) \cdot e^{jk_z z} / \omega\mu_0.$$

2. Продольная составляющая вектора Пойнтинга является вещественной величиной:

$$P_z = E_x \cdot H_y^* = E_1 \sin(\pi y/B) e^{-jk_z z} \cdot k_z E_1^* \sin(\pi y/B) \cdot e^{jk_z z} / \omega\mu_0 = (k_z / \omega\mu_0) E_1^2 \sin^2(\pi y/B).$$

Определим  $k_z$  из выражения  $k_z^2 = (2\pi/\lambda)^2 - (l\pi/A)^2 - (m\pi/B)^2$ , при  $l = 0$  и  $m = 1$  и  $\lambda = 10$  см:

$$k_z = \sqrt{\left(\frac{2\pi}{10}\right)^2 - \left(\frac{\pi}{9}\right)^2} = 0,522 \text{ см}^{-1}.$$

При  $E_1 = 5000$  В/см = 5 кВ/см,  $\omega = 2\pi f = 2\pi \cdot 3 \cdot 10^9$  с<sup>-1</sup> и

$\mu_0 = 4 \pi \cdot 10^{-9}$  Гн/см, получим:

$$P_z = \frac{0,522 \cdot 5^2 \cdot 10^6}{4\pi \cdot 10^{-9} \cdot 6\pi \cdot 10^9} \cdot \sin^2\left(\frac{\pi}{9}y\right) = 55,1 \cdot \sin^2\left(\frac{\pi}{9}y\right) \text{ кВт/см}^2.$$

3. Интегрируя по всему сечению волновода, находим мощность:

$$P = \int_0^A \int_0^B P_z dx dy = \int_0^A \int_0^B 55,1 \cdot \sin^2\left(\frac{\pi}{9}y\right) dx dy = 55,1 \cdot 4 \int_0^B \sin^2\left(\frac{\pi}{9}y\right) dy.$$

Используя замену переменной  $\alpha = \frac{\pi}{9}y$ , получим

$$P = \frac{55,1 \cdot 4}{\frac{\pi}{9}} \int_0^{\frac{\pi}{9}B} \sin^2\left(\frac{\pi}{9}y\right) d\left(\frac{\pi}{9}y\right) = \frac{55,1 \cdot 36}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{9}B} \sin^2 \alpha da = \frac{55,1 \cdot 36}{\pi} \cdot \frac{\pi}{2} =$$

$$= 991,8 \text{ кВт}.$$

В реальных установках для радиолокации мощности в импульсе достигают величин такого порядка.

4. На рис. 1 представлена структура волны  $TE_{01}$ . На рис. 2 картина электрического поля для этой волны для какого-то момента времени  $t$  представлена более наглядно. С течением времени вся картина переносится в положительном направлении оси  $z$  со скоростью  $v_\phi = \Lambda \cdot f$ .

Уровень сетки, представленной на рисунке, показывает мгновенное значение вектора  $E = E_x$ . Значение напряженности поля в заданный момент времени отрицательно там, где сетка ниже нулевого уровня. Сетка имеет нулевой уровень около боковых стенок волновода ( $y = 0$  и  $y = B$ ), где по условию  $E_x = 0$ . Расстояние между двумя ближайшими вершинами сетки (вдоль оси  $z$ ) и представляет собой длину волноводной волны  $\Lambda$ .

На рис. 3 для сравнения представлена структура волны  $TE_{02}$ , где, как уже было сказано выше, картина поля отличается тем, что вдоль оси  $y$  укладывается не одна полуволна синусоиды  $E_x$  (и соответствующего магнитного поля), а две, как это и показано на рисунке.

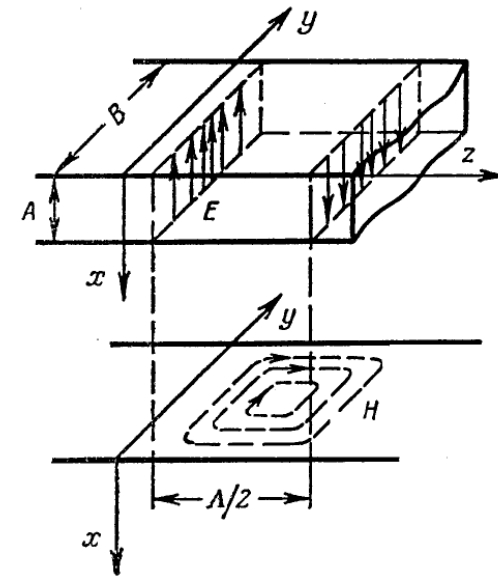


Рис. 1

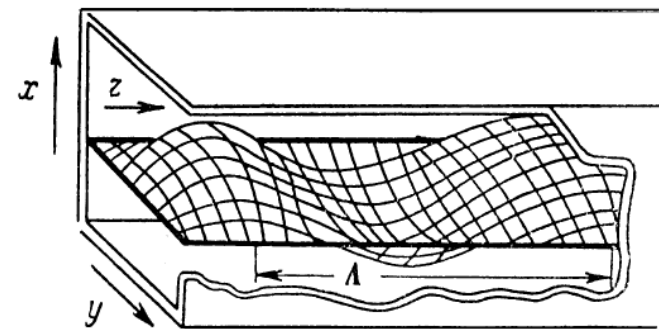


Рис. 2

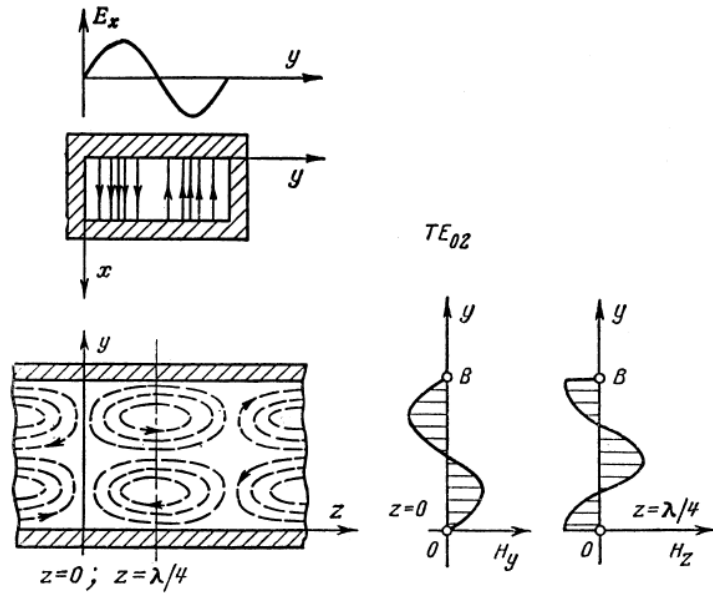


Рис. 3

### Дифференциальные операции векторного анализа

Операция	Символическая запись	Декартовы координаты $x, y, z$ . Орты: $x_0, y_0, z_0$	Цилиндрические координаты $r, \alpha, z$ . Орты: $r_0, \alpha_0, z_0$
grad $\varphi$	$\nabla\varphi$	$x_0 \frac{\partial\varphi}{\partial x} + y_0 \frac{\partial\varphi}{\partial y} + z_0 \frac{\partial\varphi}{\partial z}$	$r_0 \frac{\partial\varphi}{\partial r} + \alpha_0 \frac{1}{r} \frac{\partial\varphi}{\partial \alpha} + z_0 \frac{\partial\varphi}{\partial z}$
div $\mathbf{F}$	$\nabla \mathbf{F}$	$\frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z}$	$\frac{1}{r} \frac{\partial(rF_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial F_\alpha}{\partial \alpha} + \frac{\partial F_z}{\partial z}$
rot $\mathbf{F}$	$\nabla \times \mathbf{F}$	$\begin{vmatrix} x_0 & y_0 & z_0 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} \frac{1}{r} r_0 & \alpha_0 & \frac{1}{r} z_0 \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \alpha} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_r & r F_\alpha & F_z \end{vmatrix}$
div grad $\varphi$	$\Delta\varphi = \nabla^2 \varphi$	$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}$	$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}$

### ПРИЛОЖЕНИЕ

Для сокращения записи различных операций над скалярными и векторными величинами употребляется дифференциальный оператор Гамильтона  $\nabla$  (оператор набла), который определяется как сумма частных производных по трем координатным осям, умноженным на соответствующие единичные векторы (орты). Функцию, к которой хотят применить эту операцию пишут справа от оператора набла.

## ОСНОВЫ ЭЛЕКТРОДИНАМИКИ НАПРАВЛЯЮЩИХ СИСТЕМ

Рабочая программа  
и задание на контрольную работу  
с методическими указаниями

Редактор *Г.В. Тимченко*  
Компьютерная верстка *Н.Ф. Цыганова*

ЛР № 020307 от 28.11.91

---

Тип. зак.	Изд. зак. 151	Тираж 900 экз.
Подписано в печать 02.04.03	Гарнитура Times.	Офсет
Усл. печ. л. 1,5		Формат 60×90 <sup>1</sup> / <sub>16</sub>

---

Издательский центр РГОТУПС,  
125993, Москва, Часовая ул., 22/2

Типография РГОТУПС, 107078, Москва, Басманный пер., 6