

РОССИЙСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ОТКРЫТЫЙ
ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ПУТЕЙ СООБЩЕНИЯ
МИНИСТЕРСТВА ПУТЕЙ СООБЩЕНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

16/1/10

Одобрено кафедрой
«Теоретическая
и прикладная механика»

ТЕОРИЯ МЕХАНИЗМОВ И МАШИН

Методические указания
по выполнению лабораторных работ
для студентов III курса

специальностей

150700 ЛОКОМОТИВЫ (Т)

150800 ВАГОНЫ (В)

170900 ПОДЪЕМНО-ТРАНСПОРТНЫЕ. СТРОИТЕЛЬНЫЕ,
ДОРОЖНЫЕ МАШИНЫ И ОБОРУДОВАНИЕ (СМ)

181400 ЭЛЕКТРИЧЕСКИЙ ТРАНСПОРТ ЖЕЛЕЗНЫХ ДОРОГ (ЭПС)



Москва - 2004

Методические указания и лабораторный практикум составлены в соответствии с государственными требованиями к минимуму содержания и уровню подготовки инженеров путей сообщения по специальности 150700 (Т), 150800 (В), 181400 (ЭПС), 170900 (СМ) на основе программы и тематического плана по дисциплине «Теория механизмов и машин».

С о с т а в и т е л и : канд. техн. наук, проф. В.Г. МИЦКЕВИЧ,
канд. техн. наук, доц. А.Н. НАКАПКИН,
доцент А.В. ВАСИЛЬЕВ

ПРЕДИСЛОВИЕ

Практическая работа в лаборатории преследует цель ознакомить студента с основами экспериментального исследования механизмов, дать ему возможность на практике проверить отдельные вопросы теории, глубже проникнуть в физическую сущность изучаемых явлений и привить ему навыки самостоятельной постановки и проведения эксперимента.

Перед выполнением лабораторных работ студент обязан тщательно ознакомиться с теоретическими предпосылками по этим работам, изучив необходимый материал по настоящему руководству и соответствующие разделы курса по рекомендуемым учебным пособиям, подготовить бланки выполнения лабораторных работ, аккуратно вычертив в них требуемые схемы установок. В процессе выполнения работ записываются результаты эксперимента и данные вычислений. Схемы вычерчиваются мягким карандашом, а все надписи выполняются чернилами. По окончании оформленные работы предъявляются преподавателю для просмотра и подписи. После удовлетворительного собеседования по существу проделанных работ студенту предоставляется зачет.

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 1

Структурный анализ механизмов

Работа заключается в составлении кинематических схем и выполнении структурного анализа плоских механизмов.

Содержание и порядок проведения работы

1. Составить эскизную (без масштаба) кинематическую схему в соответствии с требованиями ГОСТ 2.770 – 68.

Обозначить на схеме все звенья арабскими цифрами и все кинематические пары — прописными латинскими буквами (ведущее звено обозначают цифрой 1; кинематические пары, образованные звеньями со стойкой, обозначают буквами O , O_p , O_2 и т.д.).

2. Составить таблицу характеристик кинематических пар; указать их обозначение, составляющие звенья, наименование, класс.

3. Определить степень подвижности механизма. Исключить, если требуется, пассивные связи, и «лишние» степени свободы, указав их назначение и особенности.

4. Выделить структурные группы, образующие механизм; указать их класс, порядок и вид. Указать класс механизма по группе наивысшего класса и порядка.

5. Составить формулу строения механизма (последовательности присоединения структурных групп).

6. Определить характерные размеры звеньев (измерить).

7. Построить план механизма для наиболее наглядного положения.

Работа может выполняться на ЭВМ с использованием программных модулей «DIADA» или «APM Winslider» (по указанию преподавателя).

Оборудование, инструменты, принадлежности

1. Модели механизмов (по указанию преподавателя).
2. Штангенциркуль с величиной отсчета по нониусу 0,05 или 0,1 мм.
3. Чертежные принадлежности.
4. Программный модуль «DIADA» или «APM Winslider».

Указания

1. Если степень подвижности механизма $W = 1$, то это соответствует одному ведущему (ВЩ) звену. Если $W > 1$, то следует назначить дополнительные ВЩ звенья или указать «лишние» степени свободы. Если $W < 1$, то в механизме есть пассивная связь или допущена ошибка при составлении кинематической схемы.

2. Для выделения структурных групп Л.В. Ассура попробуйте «снять» со схемы группу, наиболее удаленную от ВЩ звена. При этом степень подвижности W оставшейся части механизма должна оставаться без изменений. ВЩ звенья включать в структурные группы нельзя.

Сняв первую группу, следует снимать в том же порядке следующие группы до тех пор, пока не останется одно или несколько ВЩ звеньев.

3. Измерения звеньев механизма рекомендуется выполнять в следующем порядке. Выбрать на стойке механизма одну неподвижную точку (обычно центр валика ведущего звена) и принять ее за начало координат; определить положение всех неподвижных шарниров и направляющих, а также углы, составляемые неподвижными направляющими с выбранными осями координат. Определить характерные размеры подвижных звеньев (например, расстояния между шарнирами, радиусы кривизны).

Краткие сведения о структуре и классификации механизмов

Основные понятия и определения

Теория механизмов и машин (ТММ) есть наука, изучающая структуру (строение), кинематику и динамику механизмов. Ее основные проблемы — исследование существующих механизмов (анализ) и проектирование новых механизмов по заданным условиям (синтез).

Механизм — это механическая система тел, предназначенная для преобразования движения одного или нескольких тел в требуемые движения других тел. Механизмы, входящие в состав машин весьма разнообразны.

В ТММ изучают механизмы, которые по своим структурно-конструктивным признакам делятся на семь следующих видов: рычажные, зубчатые, кулачковые, винтовые, фрикционные с гибкими связями, фрикционные с непосредственным контактом катков, прочие (в том числе смешанные).

Из практики известно, что всякий механизм состоит из отдельных деталей («частей»). *Деталью* называют изделие, изготовленное без каких-либо сборочных операций, например: рычаг, ось, винт, гайка, зубчатое колесо.

Каждая подвижная деталь или группа деталей, образующих одну жесткую систему тел, называется *подвижным звеном* механизма. Например, шатун двигателя представляет собой одно подвижное звено (звено 2, рис. 1, а), хотя может состоять из нескольких деталей: тела шатуна, крышек, вкладышей, болтов, соединяющих крышки с телом шатуна, и т.д. Все неподвижные детали образуют одно *неподвижное звено* или стойку. Таким образом, в любом механизме есть стойка и одно или несколько подвижных звеньев.

Подвижное соединение двух соприкасающихся звеньев называется *кинематической парой*. Поверхности, линии, точки звена, по которым оно может соприкасаться с другим звеном, образуя кинематическую пару, называют *элементом пары*.

Связанная система звеньев, образующих между собой кинематические пары, называется *кинематической цепью*. В основе каждого механизма лежит замкнутая кинематическая цепь, и составляющими ее являются звенья и кинематические пары.

Замкнутая кинематическая цепь такая, каждое звено которой входит в две кинематические пары; незамкнутая — в которой есть звенья, входящие только в одну кинематическую пару.

Виды и свойства кинематических пар

На относительное движение каждого звена кинематической пары накладываются ограничения, зависящие от формы контакта звеньев, т.е. от вида элементов пары (табл. 1). По виду элементов различают пары *низшие*, в которых звенья контактируют по поверхностям, и *высшие*, в которых контакт имеет место по линии или в точке. По виду относительного движения звеньев различают пары *пространственные* и *плоские*.

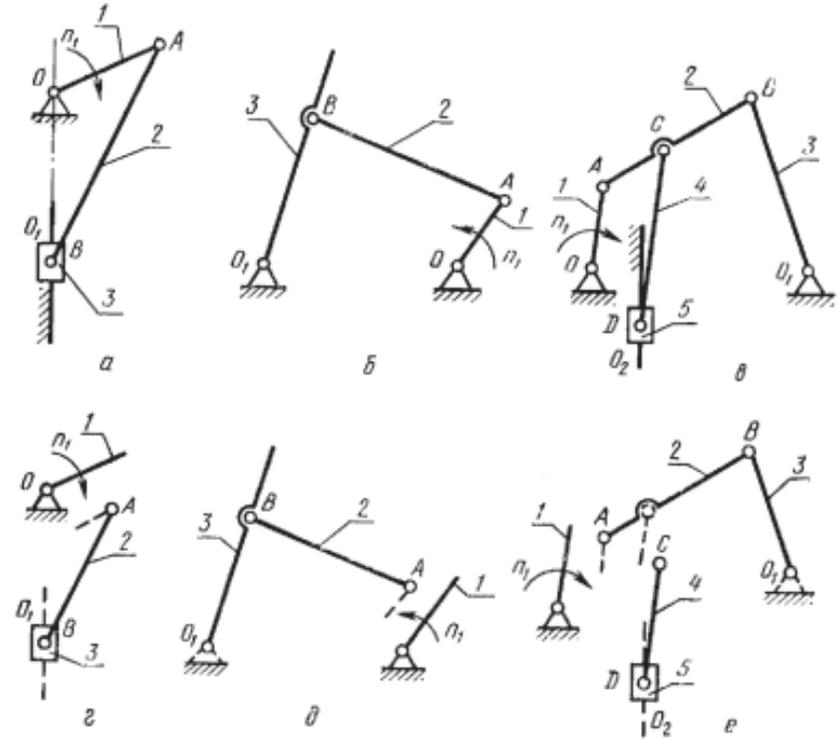


Рис. 1

Ограничения, наложенные на относительное движение звеньев кинематической пары, называют *условиями связи* в паре. Поскольку положение свободного звена в пространстве определяется шестью независимыми параметрами (шесть степеней свободы), то число S условий связи, наложенных на относительное движение каждого звена кинематической пары, может располагаться в пределах от 1 до 5, т.е. $1 \leq S \leq 5$. Следовательно, число H степеней свободы звена кинематической пары в относительном движении может быть выражено зависимостью $H = 6 - S$, где $5 \geq H \geq 1$.

В основу классификации кинематических пар положено число S условий связи, налагаемых ими на относительное движение

Таблица 1

Классификация кинематических пар

Класс пары	Число условий связи	Число степеней свободы	Изображение кинематической пары		Возможные относительные движения звеньев
			Конструктивное упрощение	Условное	
I	1	5			Вращательные-3 Поступательные-2
II	2	4			Вращательные-2 Поступательные-2
III	3	3			Вращательные-3 Поступательные-0
IV	4	2			Вращательные-1 Поступательные-1
V	5	1			Вращательные-1 Поступательные-0
					Вращательные-0 Поступательные-1

ние звеньев. В соответствии с этим мы имеем кинематические пары I, II, III, IV и V классов, см. табл. 1.

В дальнейшем рассматриваются механизмы с кинематическими парами V класса (нижние пары: вращательная и поступательная) и IV класса (высшая пара). Конструктивное, упрощенное и условное изображение этих пар показано в табл. 1.

Кинематические схемы механизмов

Кинематические схемы механизмов следует выполнять с использованием условных изображений кинематических пар (табл. 1) и звеньев.

Кинематические схемы выполняются без соблюдения масштаба. План механизма есть его кинематическая схема, выпол-

ненная в определенном масштабе $K_l = \frac{l}{\bar{l}}$, мм, где l — натуральный размер любого звена механизма, м; \bar{l} — размер того же звена механизма на плане (чертеже), мм. Назначается он из соображений наглядности чертежа плана и масштаба, числовые значения которого удобны (просты) для расчета.

Определив значение масштаба K_l по какому-либо звену, определяют остальные размеры звеньев для построения плана

механизма; $\bar{l}_1 = \frac{l_1}{K_l}$, мм.

Структурная формула плоского механизма

В плоском механизме траектории точек движущихся звеньев находятся в одной или параллельных плоскостях.

Если количество подвижных звеньев плоского механизма равно n , то общее число степеней свободы, которыми обладали эти звенья до соединения их в кинематические пары, равно $3n$, где 3 — число степеней свободы звена в плоском движении.

Кинематические пары накладывают связи на относительное движение звеньев, причем число связей зависит от класса пары (см. табл. 1). Таким образом, для кинематической цепи из $3n$ степеней свободы необходимо вычесть те степени свободы, ко-

торые исключаются вхождением звеньев в кинематические пары. Тогда число степеней свободы (степень подвижности) плоского механизма относительно стойки (формула Чебышева)

$$W = 3n - 2p_V - p_{IV},$$

где p_{IV} — количество пар IV класса (высшие пары);
 p_V — количество пар V класса (низшие пары).

Кинематические пары пятого класса в пространственных механизмах налагают пять условий связи (см. табл. 1).

В плоском механизме кинематические пары пятого класса налагают два условия связи на относительное движение его звеньев. Аналогично пары четвертого класса налагают одно условие связи. Число степеней свободы механизма есть то число подвижных звеньев, которые движутся по заданному закону, при этом движение остальных звеньев механизма вполне определенное.

Для механизма, изображенного на рис. 1, в, имеем: $n = 5$, $p_V = 7$, $p_{IV} = 0$, следовательно $W = 3 \cdot 5 - 2 \cdot 7 = 1$, т.е. при заданном законе движения одного из звеньев движение всех остальных звеньев кинематической цепи будет определенным.

Структурные группы в плоских механизмах с низшими кинематическими парами

Л.В. Ассур установил, что все механизмы образованы путем последовательного присоединения к ВЦ звену (или звеньям) и стойке простых цепей (групп) с нулевой степенью подвижности.

Структурная формула группы

$$W = 3n - 2p_V = 0,$$

откуда числа звеньев и кинематических пар в группе определяются соотношением

$p_V = \frac{3n}{2}$, где n — четное число, а p_V кратно трем.

Параметры цепей, удовлетворяющих условию $W = 0$:

n	2	4	6...
p_V	3	6	9...

причем цепи с $n = 6$ и $p_V = 9$ встречаются редко. При $n = 2$ и $p_V = 3$ возможны пять видов групп (рис. 2), которые отличаются друг от друга только соотношением между числами вращательных и поступательных пар и порядком их расположения; эти группы называются двухповодковыми или диадами.

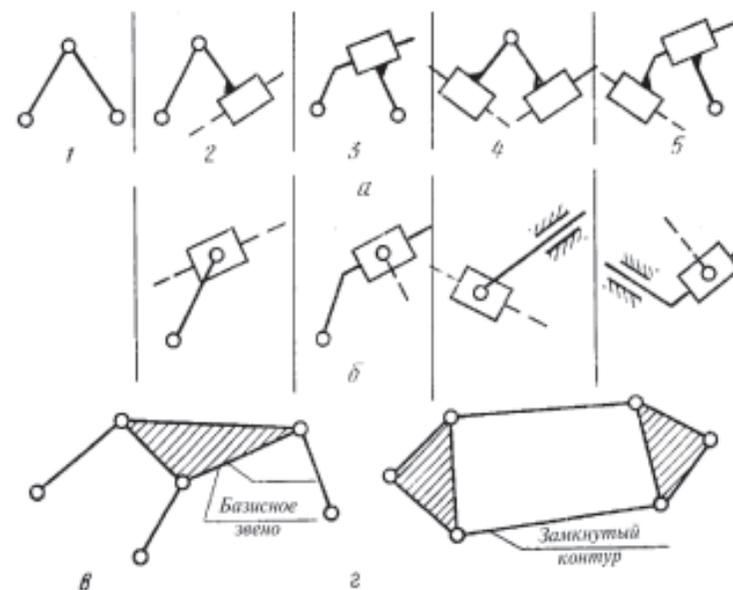


Рис. 2

При $n = 4$ и $p_V = 6$ возможны два варианта групп — трехповодковая и с замкнутым контуром.

Примеры простейших структурных групп показаны на рис. 2: a — модификации двухповодковой группы (диады; $n = 2$, $p_V = 3$), b — конструктивные варианты диад; $в$ — трехповодковая группа ($n = 4$, $p_V = 6$); $г$ — группа с четырехшарнирным замкнутым контуром и двумя внешними шарнирами ($n = 4$, $p_V = 6$).

Любая группа, присоединенная элементами концевых пар к стойке, будет неподвижна ($W = 0$). Следовательно, присоединение и отсоединение групп не изменяет степени подвижности

механизма, а движение самой группы полностью определяется движением звеньев, к которым она присоединена.

Последовательность образования кинематической цепи может быть описана формулой строения механизма. Например, для механизмов, (см. рис. 1), формулы строения будут:

- а) I (1) → II (2–3);
- б) I (1) → II (2–3);
- в) I (1) → II (2–3) → II (4–5).

Римские цифры указывают класс группы (табл. 2), а арабские — номера звеньев, образующих группу.

Класс и порядок механизма определяют соответственно по наиболее высокому классу и порядку входящих в него групп (см. табл. 2). При этом ведущие звенья, соединенные со стойкой вращательной или поступательной парой, относят к механизмам I класса. К таким двухзвенным одноповодковым механизмам относится, например, электродвигатель, у которого стойкой будет статор, поводком — ротор, а нижней вращательной парой — подшипники. Таким образом, на рис. 1, изображены механизмы I класса 2 порядка, так как они образованы из ведущих механизмов I класса последовательным присоединением двухповодковых групп (группы Ассура, у которых два свободных звена). На рис. 1, з, д, е эти группы Ассура показаны.

Таблица 2

Классификация структурных групп плоских механизмов по И.И. Артоболовскому (приводится полностью)

Класс группы	Замкнутый контур	Порядок группы			
		2	3	4	5
II					
III					

Пассивные связи

Пассивной связью можно назвать, например, дополнительное звено, которое не накладывает ограничений на движение механизма вследствие особого подбора размера этого звена и размеров других звеньев (рис. 3, а). Если такого подбора размеров не будет, то дополнительное звено уменьшит степень подвижности механизма — наложит действительную связь (рис. 3, б). Обычно пассивные связи вводят для увеличения жесткости механизма или одновременного привода нескольких звеньев с одним законом движения (звенья OA и O_1B на рис. 3, а). При структурном анализе механизма пассивные связи не учитывают. Так, если степень подвижности механизма будет получена $W < 1$, но заранее известно, что механизм движется, то следует найти и исключить пассивные связи.

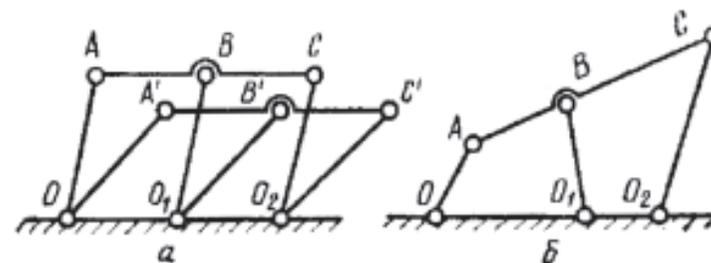


Рис. 3

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 2

Определение параметров эвольвентного зубчатого колеса

Работа состоит в определении параметров эвольвентного зубчатого колеса с использованием универсального измерительного инструмента.

Содержание и порядок проведения работы

1. Начертить схему зубчатого колеса и схему измерений. При этом следует ориентироваться на рис. 5.
2. Сосчитать число зубьев колеса Z .
3. По табл. 4 определить количество зубьев n и $n + 1$, охватываемых штангенциркулем при измерении.
4. Измерить штангенциркулем трижды в разных местах длины общих нормалей W_n и W_{n+1} .
5. По средним значениям W_n и W_{n+1} определить величину шага по основной окружности.
6. Рассчитать модуль колеса и принять за действительный ближайший из стандартных табл. 3. Несходимость расчетного модуля со стандартным не более $\pm 2\%$.
7. Определить значения диаметров d , d_a , d_f , d_b . Значения d_a и d_f сопоставить с измеренными на колесе. Разница расчетных значений диаметров и значений полученных при измерении не должна превышать $\pm 0,25$ мм.
8. Результаты измерений и расчетов занести в таблицу.

Оборудование, инструменты

1. Зубчатое колесо.
2. Штангенциркуль с величиной отсчета по нониусу 0,05 мм.

Краткие сведения об эвольвентном зацеплении зубчатых колес

Конструкция зубчатого колеса представляет собой круговой цилиндр, на котором расположены зубья. В дальнейшем для простоты изображения конструктивных элементов будем рассматривать зубчатое колесо в торцевом сечении, считая его плоским.

На рис. 4 изображено зубчатое колесо 1 в зацеплении с колесом 2, боковые поверхности зубьев которых выполнены по эвольвенте. Построение эвольвенты для одного из зубьев колеса 1 видно из рисунка. Она образуется путем перекатывания прямой AB без скольжения по окружности с диаметром d_{b1} , которая называется основной. Перекатывание прямой начинается с точки M_b . Здесь эта точка принадлежит как прямой, так и окружности. В процессе перекатывания прямая все время будет касаться основной окружности (текущие точки K_1 , K_2 , K_3), а точка прямой M_b опишет эвольвенту M_b , M_1 , M_2 , M_3 . Часть этой эвольвенты образует боковые профили зубьев. Изготавливаться зубчатые колеса с такими эвольвентными профилями зубьев могут с помощью такого же колеса с зубьями эвольвентного профиля, имеющих режущие грани. Таким производящим колесом (долбяком) может быть колесо 2.

В процессе изготовления колеса 1 производящее колесо совершает поступательное движение параллельно своей оси. Одновременно с этим оно вместе с изготавливаемым колесом 1 имеет такое же вращательное движение, какое они имели бы в зацеплении друг с другом.

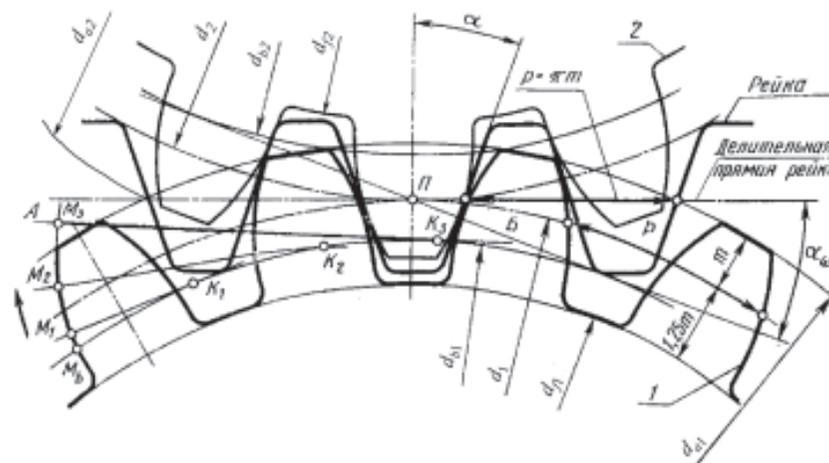


Рис. 4

Если безгранично увеличивать число зубьев колеса 2, то это колесо станет рейкой с зубьями, имеющими прямолинейный контур (профиль).

Изготовление зубчатых колес инструментом, выполненного по параметрам реечного контура, является наиболее распространенным. Эти параметры стандартизированы. Прямая, перпендикулярная осям симметрии зубьев, по которой толщина зуба равна ширине впадины, называется делительной прямой рейки, рис. 4. Расстояние между одноименными профилями соседних зубьев по делительной или любой другой параллельной ей прямой называется шагом p .

Одним из основных параметров реечного контура является модуль

$$m = \frac{p}{\pi}.$$

Измеряется модуль в миллиметрах. Значения его строго регламентированы стандартом. Частичное извлечение значений модуля из ГОСТа приведено в табл. 3.

Таблица 3

m	1-й ряд	1,5	2	2,5	3	4	5	6	8	10	12	16
	2-й ряд	1,75	2,25	2,75	3,5	4,5	5,5	7	9	11	14	18

Угол α между боковой стороной и осью зуба называется углом профиля реечного контура. Величина его по стандарту равна 20° .

Изготовленное реечным инструментом зубчатое колесо 1 имеет зависимые от него параметры. Модуль и шаг колеса получают равными модулю и шагу инструмента. Тогда модуль колеса также определяется по выше приведенной формуле

$$m = \frac{p}{\pi},$$

где p — шаг по делительной окружности зубчатого колеса.

Шагом p по делительной окружности называется расстояние по дуге этой окружности между одноименными профилями соседних зубьев.

Делительной окружностью называется такая окружность, шаг по которой равен шагу реечного инструмента.

Очевидно, что шаг p контура рейки должен разместиться на длине делительной окружности z раз:

$$\pi d = zp = z\pi m,$$

откуда диаметр делительной окружности

$$d = mz,$$

где z — число зубьев колеса.

При нарезании зубчатого колеса делительная прямая рейки может касаться окружности — такое ее положение называется номинальным, а, таким образом изготовленное колесо, называется колесом без смещения.

Во избежание подрезания профилей зубьев (малого колеса) делительная прямая рейки может быть смещена от номинального положения. В этом случае колесо называется скорректированным. Если она пересекает делительную окружность, получится колесо со смещением отрицательным, если не пересекает и не касается, — колесо со смещением положительным.

В нашем случае рассматриваются колеса без смещения. В таких колесах диаметр делительной окружности равен диаметру начальной.

Начальной окружностью называется такая окружность зубчатого колеса 1, которая касается в полюсе зацепления 11 такой же окружности зубчатого колеса 2 и перекачивается по ней без скольжения, когда колеса находятся в зацеплении. Отдельно взятое зубчатое колесо не имеет начальной окружности, для него это понятие лишено смысла.

В зубчатых колесах без смещения, каковым является колесо 1, диаметр окружности вершин

$$d_{a1} = d_1 + 2m \quad \text{или} \quad d_{a2} = m(z_1 + 2).$$

Диаметр окружности впадин

$$d_{f1} = d_1 - 2,5m \quad \text{или} \quad d_{f1} = m(z_1 - 2,5).$$

Окружность вершин ограничивает высоту зуба. Окружность впадин ограничивает зубья со стороны тела колеса.

Диаметр основной окружности

$$d_{b1} = d_1 \cos \alpha_{\omega},$$

где α_{ω} — угол зацепления колес 1 и 2.

У колес без смещения $\alpha_{\omega} = \alpha = 20$.

Анализ формул, определяющих геометрические параметры зубчатого колеса (диаметры, шаг), показывает, что они могут быть рассчитаны, если известно значение модуля.

Экспериментально определить модуль зубчатого колеса возможно на основании свойств общей нормали.

Рассмотрим прямую AB на рис. 5. Эта прямая касательна к основной окружности в точке K и пересекает несколько зубьев n . Она является суммой радиусов кривизны KA и KB , которые являются одновременно нормальными к касательным, проведенным эвольвентам через точки A и B , поэтому такую прямую называют общей нормалью. Длина общей нормали W_n , которая пересекает n зубьев, в нашем случае $n = 3$, фактически представляет собой развертку дуги Cl основной окружности

$$W_n = 2p_b + s_b,$$

где p_b и s_b — соответственно шаг и толщина зуба по основной окружности.

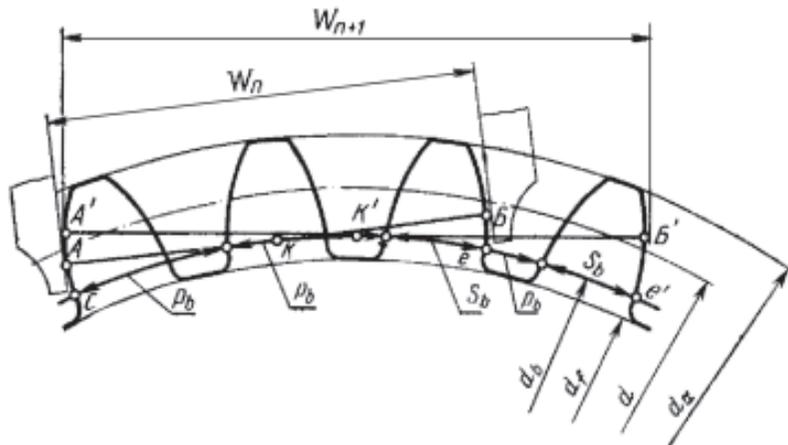


Рис. 5

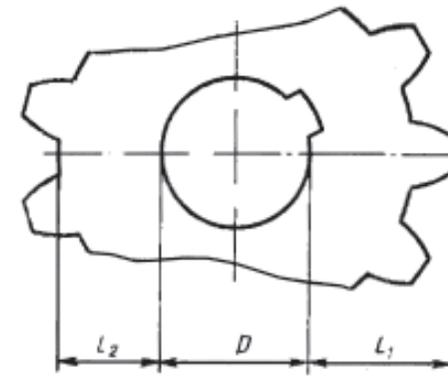


Рис. 6

Аналогично определяется длина общей нормали W_{n+1} , которая пересекает число зубьев на один больше $n = 4$

$$W_{n+1} = 3p_b + s_b.$$

Длину общей нормали можно измерять штангенциркулем. При этом число зубьев n и $n + 1$ будет соответствовать числу зубьев, охватываемых штангенциркулем при измерении, когда его губки будут касательными эвольвентным профилям зубьев. Практически уверенность в этом будет тогда, когда одновременно обе губки штангенциркуля будут иметь просвет с обеих сторон от точек касания к эвольвентной части профилей.

В зависимости от общего числа зубьев Z количество зубьев n , охватываемых штангенциркулем для каждого колеса, будет разным и определяется из табл. 4.

Таблица 4

Z	19 – 27	28 – 36	37 – 45	46 – 54	55 – 63	64 – 72	73 – 81
n	3	4	5	6	7	8	9

Имея результаты замеров W_n и W_{n+1} , получим величину шага p_b по основной окружности

$$W_{n+1} - W_n = p_b,$$

тогда величина модуля колеса определится по формуле

$$m = \frac{P}{\pi} = \frac{P_b}{\pi \cos \alpha}.$$

В связи с тем, что зубья колеса нарезаны с отклонениями от номинальных размеров, а также с учетом возможного их износа и погрешностей при изменениях W_n и W_{n+1} , полученный модуль может не совпасть со стандартным модулем рейки табл. 3.

Поэтому за действительный модуль надо принять ближайший стандартный модуль из этой таблицы.

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 3

Построение эвольвентных профилей методом обката

Работа заключается в ознакомлении с методом нарезания зубчатых колес и вычерчивании профилей зубьев при коэффициенте смещения $x_1 = 0$ и $x_2 > 0$.

Содержание и порядок проведения работы

1. Ознакомиться с устройством и работой прибора, приготовить бумажный круг и карандаш.
2. Закрепить круг на диске прибора и провести вычерчивание профилей при $x_1 = 0$ (колесо 1).
3. Ослабив натяжение проволоки, повернуть круг приблизительно на 120. Произвести вычерчивание профилей при $x_2 > 0$, установив на приборе соответствующий сдвиг (колесо 2).
4. Снять бумажный диск и нанести циркулем основную и делительную окружности.
5. С точностью до 0,3 мм измерить толщины зубьев по основной и делительной окружностям (для обоих колес) и записать в таблицу.
6. Рассчитать указанные в таблице параметры и сделать выводы.

Оборудование, инструменты, принадлежности

1. Прибор для вычерчивания профилей эвольвентных зубьев методом обката (рис. 8).
2. Приспособление для вырезания заготовок колес из бумаги.

Краткие сведения об изготовлении зубчатых колес методом обката

Основные параметры зубчатого зацепления

Нарезание эвольвентных профилей методом обката или огибания является наиболее распространенным способом производства зубчатых колес. Режущий инструмент в этом случае – инструментальная рейка (гребенка), червячная фреза или долбяк в форме шестерни. Изготовлению зубчатых колес предшествует их конструирование по исходному контуру, параметры которого стандартизованы.

Инструментальная рейка является зеркальной копией стандартного исходного контура.

Процесс нарезания инструментальной рейкой осуществляется при сложном движении заготовки *A*, складывающемся из поступательного и вращательного движений в горизонтальной плоскости, и при возвратно-поступательном движении инструмента *B* по вертикали (рис. 7). Обкаточное движение подачи заготовки происходит в промежутке между двумя рабочими ходами инструмента, когда он находится в верхнем положении.

После движения подачи, в результате которого производится обкатка, рейка, опускаясь, снимает стружку (рабочий ход) и возвращается в исходное положение. Профиль зуба получается как огибающая профиля рейки в нескольких последовательных ее положениях относительно колеса.

Преимуществом зуборезных станков, работающих по методу обката, является то, что одним и тем же инструментом можно нарезать эвольвентные профили с разными параметрами, определяемыми положением заготовки относительно рейки. Если делительная окружность колеса касается делительной прямой рейки, то профиль зуба нормальный (нулевой, некорриги-

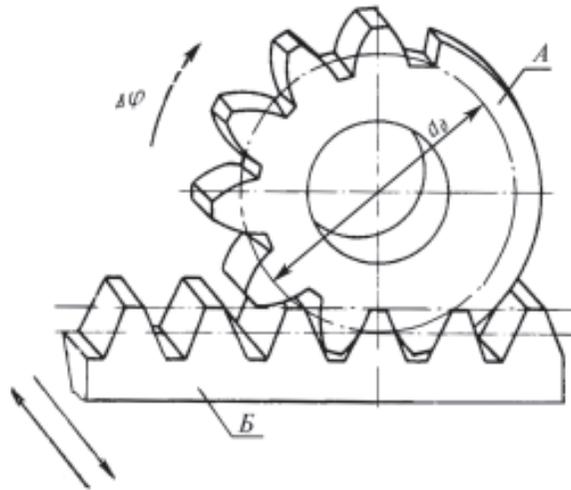


Рис. 7

рованный). У такого колеса высота головки зуба равна модулю, а толщина зуба по делительной окружности равна ширине впадины.

Делительной окружностью называют окружность, на которой шаг равен шагу инструментальной рейки $p = \pi m$.

Делительная прямая рейки — средняя прямая, на которой толщина зуба равна ширине впадины, т.е. $\frac{\pi m}{2}$.

Так как шаг рейки постоянен $p = \pi m$ для любой прямой, параллельной делительной, то делительная окружность может обкатываться без скольжения по любой из этих прямых. Зуб в этом случае также получается эвольвентным, но отличается от нормального и называется корригированным (исправленным).

Корригирование зубчатых колес производится с целью уменьшения габаритов и улучшения качества зацепления, а именно: устранения подреза ножки зуба, увеличения коэффициента перекрытия, уменьшения износа, повышения прочности зуба. При нарезании корригированных колес расстояние между делительной окружностью и делительной прямой b называется абсолютным сдвигом, или просто сдвигом рейки.

Смещение рейки (по сравнению с установкой для нарезания нулевых колес) в направлении от центра заготовки называется положительным, а в направлении к центру — отрицательным.

Коэффициентом сдвига (смещения) или относительным сдвигом называется отношение

$$x = \frac{b}{m}.$$

Следует отметить, что при сдвиге рейки эвольвента и основная окружность (окружность, от которой начинается эвольвента) не изменяются.

Величина относительного сдвига рейки, необходимая для устранения подреза ножки зуба, определяется по формуле:

$$x = \frac{2h_a^* - z \sin^2 \alpha}{2},$$

где h_a^* — коэффициент высоты головок зубьев;
 α — угол профиля зуба рейки;
 z — число зубьев.

При $h_a^* = 1$, $\alpha = 20^\circ$ (в соответствии со стандартом)

$$x = \frac{17 - z}{17}$$

Параметры колес (как скорректированных, так и нулевых) рассчитываются по нижеприведенным формулам (табл. 5).

Таблица 5

Элементы колес и зацепления	Обозначение	Расчетные формулы
Радиус делительной окружности	r	$0,5mz$
Радиус основной окружности	r_b	$0,5mz \cos \alpha = r \cos \alpha$
Шаг по делительной окружности	p	πm
Шаг по основной окружности	p_b	$\pi m \cos \alpha = p \cos \alpha$
Коэффициент сдвига	x	$\frac{17 - z}{17}$
Радиус окружности впадин	r_f	$0,5mz - 1,25m + xm$
Радиус окружности выступов	r_a	$0,5mz + m + xm$
Толщина зуба по делительной окружности	S	$0,5\pi m + 2mx \operatorname{tg} \alpha$
Толщина зуба по основной окружности	S_b	$2r_b \left(\frac{S}{2r} + \operatorname{inv} \alpha \right)$ $0,014904$

Описание прибора для вычерчивания зубьев

Принципиальная схема прибора приведена на рис. 8. Основанием прибора служит корпус 4. На основании установлены диск и рейка. Диск состоит из верхней части 9, выполненной из органического стекла и представляющий собой круг диаметром, равным диаметру заготовки колеса, и нижней части 8 — круга с диаметром, равным диаметру делительной окружности. Оба круга жестко между собой соединены и могут вращаться на оси, укрепленной в основании 4 прибора.

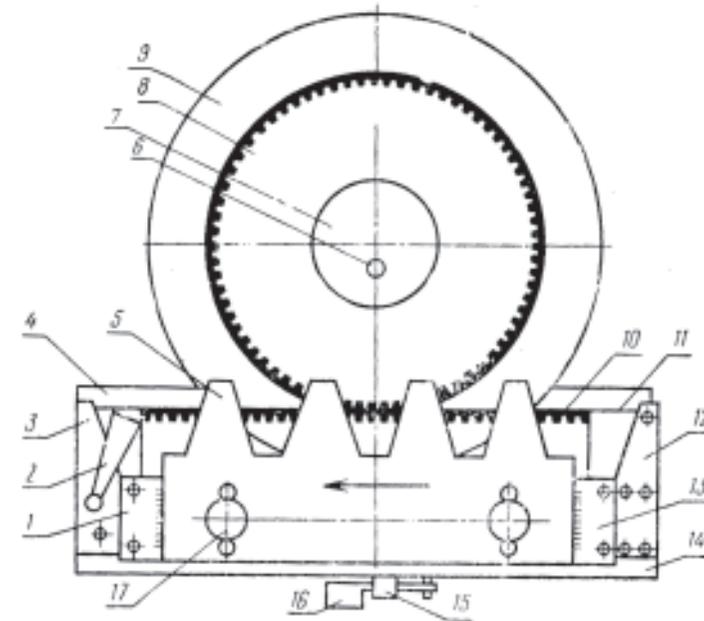


Рис. 8

Рейка 5 совместно со шкалами 1 и 13, планкой 10 и захватами 3 и 12 может перемещаться поступательно в направляющих типа ласточкиного хвоста 14. Вращение дисков 8 и 9 и поступательное перемещение рейки 5 между собой связаны: в относительном движении круг 8 (делительная окружность) без скольжения обкатывается по ребру планки 10, с которым совпадает делительная прямая рейки. Обкатывание без скольжения производится следующим образом. К неподвижному захвату 12 прикрепляется стальная проволока 11, которая идет сначала влево, затем огибает диск 8, наматываясь на него по часовой стрелке (точно по делительной окружности), и прикрепляется к захвату 3. Захват 3 при помощи эксцентрикового механизма, управляемого рукояткой 2, может несколько перемещаться и создавать необходимое натяжение проволоки 11. Для того, чтобы проследить и проверить обкатывание без скольжения, у некоторых приборов по окружности круга 8 и по краю планки 10

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 4

Полное уравнивание вращающихся тел

В работе производится динамическая балансировка ротора. При этом величина и положение противовеса определяются с использованием корректирующей массы, величина и радиус которой заданы.

Содержание и порядок проведения работы

1. Ознакомиться с устройством и принципом работы установки.
2. Установить индикатор на 0.
3. Разогнать ротор до оборотов, превышающих резонансные и записать амплитуду x_0 . Произвести опыт трижды и определить среднее значение x_0 .
4. Установить корректирующую массу, заданную преподавателем, разогнать ротор и определить среднее значение трех измерений амплитуды x_1 .
5. Переставить корректирующую массу на 180° и, разогнав ротор, измерить x_2 . Определить среднее значение x_2 из трех опытов.
6. Рассчитать величину неуравновешенности и угла установки противовеса.
7. Массу и радиус противовеса выбрать из условия удобства размещения.
8. Осуществить контрольные вращения ротора с записью амплитуд x_3, x_4 при $+\alpha$ и $-\alpha$.

Оборудование, инструменты, принадлежности:

1. Балансировочный станок (с индикатором).
2. Уравниваемое тело (ротор).
3. Набор шайб (корректирующие массы).

Краткие сведения о балансировке вращающихся тел

В современном машиностроении все более широкое применение получают быстроходные машины, что позволяет уменьшить габариты и вес машины на единицу мощности.

Вместе с ростом скоростей значительно возрастают и динамические нагрузки, поэтому уравнивание сил инерции вра-

нанесены деления с одинаковым шагом. Совместное движение рейки и диска осуществляется при помощи шагового храпового механизма, приводящегося в действие от рычага 16. При нажатии рычага 16 рейка рабочей собачкой подается влево (по стрелке) на 4–5 мм, при освобождении рычага 16 рейка фиксируется запирающей собачкой. Нажатием на плоскую пружину 15 обе собачки выводятся из сцепления с рейкой 5, и рейка получает возможность свободного передвижения от руки вправо и влево.

Помимо движения в направляющих, рейка 5 может также перемещаться в перпендикулярном направлении, приближаясь к центру заготовки или отдаляясь от него. Этим передвижением рейку можно установить так, что делительной окружности δ будет касаться и катиться по ней без скольжения любая делительная прямая рейки. Перемещение рейки отсчитывается по шкалам 1 и 13 и фиксируется винтами 17.

Построение зубьев эвольвентного профиля на приборе делается следующим образом. На три иглы диска 9 накладывается круг из чертежной бумаги с диаметром, равным диаметру заготовки колеса. Бумажный круг прочно прижимается к диску крышкой 7, привинчиваемой винтом 6. Нажимом на пружину 15 отключается храповой механизм и рейка 5 отводится в крайнее правое положение. Остро отточенным карандашом на бумажном круге прочерчивается контур зубьев рейки, для чего карандашом обводят зубья рейки, стараясь возможно ближе поставить острие карандаша к граням зубьев. Нажимом на рычаг 16 передвигают рейку (а вместе с ней поворачивается и заготовка) влево на один шаг храпового устройства и вновь очерчивают контур зубьев рейки. Так продолжают до тех пор, пока рейка 5 не придет в крайнее левое положение, а на бумажном круге будет получен (как огибающая к разным положениям зубьев рейки) контур двух–трех зубьев.

Чтобы использовать другую часть бумажного круга для очерчивания зубьев колес, бумажный круг снимать не следует. Нужно использовать рукоятку 2 в крайнее левое положение, тогда натяжение проволоки ослабнет, и диск с бумажным кругом легко повернется относительно рейки. После поворота заготовки проволока 11 снова натягивается рукояткой 2.

шающихся масс приобретает важное значение. При вращении звена к каждой элементарной точечной массе приложена центробежная сила инерции, направленная от оси вращения по радиусу и равная произведению массы на расстояние ее до оси вращения и квадрат угловой частоты вращения $P_i = m_i r_i \omega^2$.

Рассмотрим ротор, вращающийся с постоянной угловой частотой относительно оси Z (рис. 9). Здесь XYZ — выбранная неподвижная система координат; I, II — две произвольные плоскости, перпендикулярные оси вращения.

Разложим силу P_i на направления, параллельные выбранным осям координат:

$$P_{ix} = P_i \cos \alpha_i; \quad P_{iy} = P_i \sin \alpha_i; \quad P_{iz} = 0.$$

Приведем все силы в точку O_1 , для чего перенесем в эту точку силы и добавим моменты, равные произведению этих сил на кратчайшее расстояние от точки приведения до линии действия силы, т.е. в точке O_1 будут силы P_{ix}, P_{iy} и моменты $M_{ix} = P_{iy} z_i; M_{iy} = P_{ix} z_i$.

Подставив значение P_i и преобразовав его, получим:

$$P_{ix} = m_i r_i \omega^2 \cos \alpha_i = m_i x_i \omega^2$$

$$P_{iy} = m_i r_i \omega^2 \sin \alpha_i = m_i y_i \omega^2$$

$$M_{ix} = m_i y_i z_i \omega^2; \quad M_{iy} = m_i x_i z_i \omega^2.$$

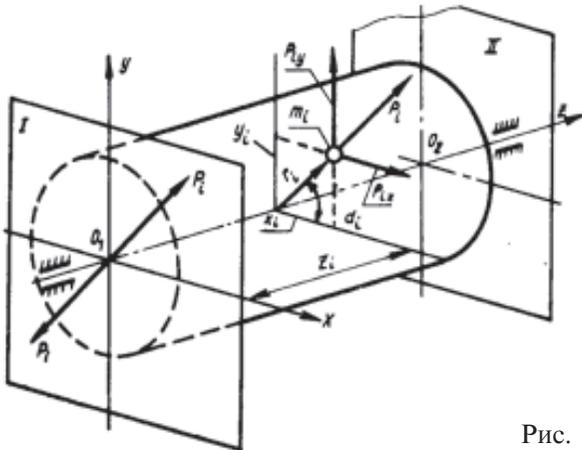


Рис. 9

Составляющие главного вектора сил инерции определим, просуммировав соответствующие составляющие сил инерции всех элементарных масс

$$P_x = \sum P_{ix} = \omega^2 \sum m_i x_i; \quad P_y = \sum P_{iy} = \omega^2 \sum m_i y_i.$$

Составляющие главного момента от сил инерции суммированием моментов от сил инерции элементарных масс

$$M_x = \omega^2 \sum m_i y_i z_i; \quad M_y = \omega^2 \sum m_i x_i z_i.$$

Момент относительно оси Z дает только тангенциальная составляющая сил инерции $P_i^t = m_i r_i \varepsilon$, суммарный момент этих сил $M_z = \varepsilon \sum m_i r_i^2 = \varepsilon I_z$ — не влияет на величину давлений в опорах и уравнивается разностью моментов движущихся сил и моментов сил сопротивления вращающегося тела.

Величина главного вектора P и главного момента M определяется по формулам

$$P = \sqrt{P_x^2 + P_y^2} = \omega^2 \sqrt{(\sum m_i x_i)^2 + (\sum m_i y_i)^2}$$

$$M = \sqrt{M_x^2 + M_y^2} = \omega^2 \sqrt{(\sum m_i y_i z_i)^2 + (\sum m_i x_i z_i)^2}.$$

Сила P и момент M вызывают добавочные давления в подшипниках, передаваемые станине и фундаменту.

Величину возникающих дополнительных давлений можно оценить на следующем примере.

Пусть центр масс ротора массой 10 кг смещен относительно оси вращения на 0,1 мм. Тогда при частоте вращения $n = 5000$ об/мин сила инерции равна:

$$P = m r \omega^2 = 10 \cdot 0,0001 \left(\frac{3,14 \cdot 5000}{30} \right)^2 = 274 \text{ Н},$$

т.е. перегрузка подшипников

$$K = \frac{P + G}{G} = \frac{274 + 10 \cdot 9,8}{10 \cdot 9,8} = 3,8.$$

Эти давления непрерывно изменяют свое направление, так как вектор силы P и вектор момента M вращаются вместе с ротором.

Сила P и момент M — гармонические возмущающие силы, вызывающие колебания опор. При совпадении частоты собственных колебаний опорной системы с частотой возмущающих сил возникает резонанс, при котором резко возрастают амплитуды колебаний, напряжения и деформации деталей опорной системы.

Для того, чтобы уничтожить дополнительные давления в опорах и устранить вызываемые ими колебания станицы и фундамента, необходимо уравновесить силу P и момент M . Этот процесс уравновешивания называется балансировкой вращающихся масс.

При малой длине ротора (детали типа тонкого диска, посаженные без перекося) и небольшой угловой частоте вращения уравновешивают только главный вектор сил инерции, пренебрегая величиной главного момента сил инерции. Такая балансировка называется статической.

Главный вектор сил инерции равен нулю, если

$$\sum m_i x_i = 0; \quad \sum m_i y_i = 0 \quad \text{или} \quad \sum m_i \bar{r}_i = 0,$$

но

$$\sum m_i x_i = m x_s; \quad \sum m_i y_i = m y_s,$$

где x_s, y_s — координаты центра тяжести;
 m — масса ротора.

Итак, условием статической уравновешенности тела является

$$m \bar{r}_s = 0.$$

Другими словами, ротор статически уравновешен, если центр масс ротора находится на оси вращения.

Произведение $m r_s$ характеризует статическую неуравновешенность, произведение $G r_s$ — статический дисбаланс.

Если ротор статически неуравновешен, то для его уравновешивания необходимо либо поместить (желательно в плоскости, проходящей через центр масс перпендикулярно оси вращения) противовес массой m_n на радиусе r_n , противоположном r_s , либо высверлить массу m_n на радиусе r_n вдоль r_s

$$m \bar{r}_s + m_n \bar{r}_n = 0, \quad m \bar{r}_s = -m_n \bar{r}_n.$$

При необходимости полного уравновешивания следует уравновесить и момент от сил инерции, т.е. Нужно обеспечить выполнение условия $P = 0; M = 0$

$$M = \omega^2 \sqrt{(\sum m_i y_i z_i)^2 + (\sum m_i x_i z_i)^2} = 0,$$

т. е.

$$\sum m_i y_i z_i = 0; \quad \sum m_i x_i z_i = 0; \quad \sum m_i \bar{r}_i z_i = 0.$$

Момент всегда можно заменить парой сил, расположенных в плоскостях I, II . Составляющие силы этой пары могут быть уравновешены двумя противовесами, помещенными в плоскостях I, II . С учетом противовеса для уравновешивания главного вектора сил инерции в плоскости I для полного уравновешивания требуется три противовеса. Однако учитывая, что два противовеса, находящиеся в плоскости I , могут быть заменены одним противовесом, можно сделать вывод, что задача полного уравновешивания может быть решена постановкой двух противовесов в двух произвольно выбранных плоскостях, перпендикулярных оси вращения ротора.

В аналитической форме условия полного уравновешивания имеют вид:

$$\sum m_i \bar{r}_i + m_I \bar{r}_I + m_{II} \bar{r}_{II} = 0,$$

$$\sum m_i \bar{r}_i z_i + m_I \bar{r}_I z_I + m_{II} \bar{r}_{II} z_{II} = 0 \quad (m_I r_I z_I = 0, z_I = 0).$$

Выбрав плоскости уравновешивания и зная расстояние между ними, всегда можно определить из второго уравнения $m_{II} r_{II}$, а затем из первого $m_I r_I$.

Следует отметить, что $\sum m_i r_i z_i$ характеризует динамическую неуравновешенность, которая обнаруживается только при вращении тела. Статическая неуравновешенность (дисбаланс) обнаруживается без вращения тела.

В заключении следует отметить, что как статическая, так и динамическая неуравновешенность — следствие неравномерного распределения масс, возникающего при изготовлении ротора. Если ось вращения ротора является осью симметрии его, то и статическая и динамическая неуравновешенность равны нулю, т.е. ротор уравновешен.

Динамическая балансировка или полное уравнивание вращающихся тел

Задача полного уравнивания заключается в таком размещении противовесов, чтобы не только сумма сил инерции, действующих на ротор и противовесы, равнялась нулю, но и сумма моментов от сил инерции ротора и противовесов также равнялась нулю.

Задача эта ставится, как правило, при неизвестных положениях плоскостей уравнивания и величин противовесов. Существует несколько типов балансировочных машин, предназначенных для решения задачи уравнивания тела при такой постановке. Рассмотрим принципиальную схему балансировочного станка системы Б.В. Шитикова (рис. 10).

Балансируемый ротор *1* установлен на подшипниках в жесткой раме *2*. Рама шарниром *б* связана с неподвижным основанием *5*. Ось шарнира *б* расположена горизонтально и должна быть перпендикулярна оси ротора *1*. Рама *2* поддерживается пружиной, упругим стержнем *4*, поэтому ротор вместе с рамой образует упругую систему, способную колебаться относительно оси шарнира *б*. Измерение амплитуды колебаний осуществляется прибором *3* (например, часовым индикатором).

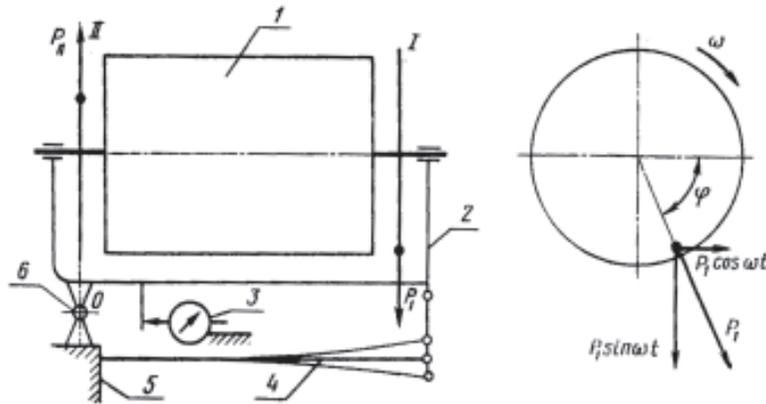


Рис. 10

I, II — плоскости уравнивания, выбранные произвольно из условия удобства размещения противовесов. Неуравновешенность в общем случае может быть сведена к двум силам P_I и P_{II} , действующим в выбранных плоскостях уравнивания. При установке ротора на балансировочном станке его располагают так, чтобы одна из плоскостей исправления проходила через ось шарнира *б*. При вращении ротора действие силы P_{II} (неуравновешенности во второй плоскости) уравнивается реакцией шарнира, сила P_I создает момент относительно точки *О*. Разложив силу P_I на горизонтальную ($P_I \cos \varphi = P_I \cos \omega t$) и вертикальную ($P_I \sin \varphi = P_I \sin \omega t$) составляющие, можно видеть, что момент от горизонтальной составляющей уравнивается реактивным моментом шарнира *б*, момент же от вертикальной составляющей вызывает вынужденные угловые колебания рамы с ротором относительно оси шарнира *б*. При совпадении собственной частоты рамы с частотой вынужденных колебаний (частота вертикальной составляющей силы P_I равна ω) наступает резонанс.

Исследования показывают, что при малых амплитудах колебаний максимальная амплитуда пропорциональна неуравновешенности ротора. Пропорциональность резонансной амплитуды статической неуравновешенности ротора используется в станке системы Б.В. Шитикова для определения величины и положения неуравновешенной массы.

Пусть неуравновешенная масса находится на радиусе r_0 под каким-то углом к оси *X* (рис. 11, *a*). Разогнав ротор до оборотов, превышающих резонансные, отключим двигатель и дадим ротору свободно выбегать. При совпадении частоты возмущающей силы с частотой собственных колебаний рамы (резонанс) запишем максимальную амплитуду x_0 , причем $x_0 = \mu m_0 \bar{r}_0 = \mu_1 \bar{P}_0$ (это следует из вышеизложенного), где μ, μ_1 — коэффициенты пропорциональности.

Установив в произвольном месте плоскости *I* на произвольном, но известном радиусе r_k дополнительную, в дальнейшем — корректирующую массу m_k , разгоним ротор и дадим ему свободно выбегать. Очевидно, в этом случае максимальная амплитуда x_1 пропорциональна геометрической сумме неуравновешен-

ностей $m_0\bar{r}_0 + m_k\bar{r}_k$ или геометрической сумме центробежных сил (рис. 11, б)

$$\bar{P}_0 + \bar{P}_k, \text{ т.е. } x_1 = \mu(m_0\bar{r}_0 + m_k\bar{r}_k) = \mu_1(\bar{P}_0 + \bar{P}_k) = \mu_1\bar{P}_1.$$

Переставим корректирующую массу на 180, сохранив тот же радиус \bar{r}_k , и вновь осуществим разгон ротора с записью максимальной амплитуды. При этом (рис. 11, в)

$$x_2 = \mu(m_0\bar{r}_0 - m_k\bar{r}_k) = \mu_1(\bar{P}_0 - \bar{P}_k) = \mu_1\bar{P}_2.$$

Из векторного треугольника, приведенного на рис. 11, г, можно на основании теоремы косинусов записать:

$$P_1^2 = P_0^2 + P_k^2 - 2P_0P_k \cos(180 - \alpha),$$

$$P_2^2 = P_0^2 + P_k^2 - 2P_0P_k \cos \alpha.$$

Сложив два последние равенства, получим

$$P_1^2 + P_2^2 = 2P_0^2 + 2P_k^2,$$

отсюда

$$P_0 = \frac{1,414P_k}{\sqrt{\left(\frac{P_1}{P_0}\right)^2 + \left(\frac{P_2}{P_0}\right)^2} - 2}$$

или, учитывая, что

$$P_k = m_k r_k \omega^2, \quad P_0 = m_0 r_0 \omega^2, \quad x_i = \mu_i \bar{P}_i,$$

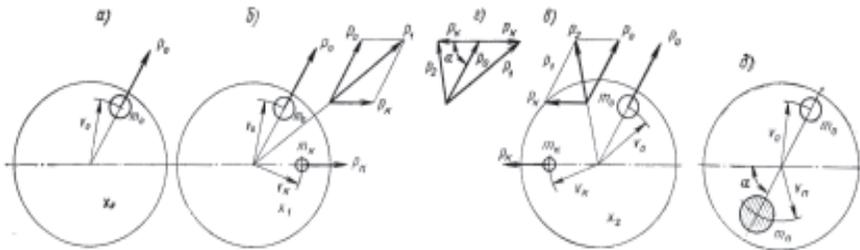


Рис. 11

получим

$$m_0 r_0 = \frac{1,414 m_k r_k}{\sqrt{\left(\frac{x_1}{x_0}\right)^2 + \left(\frac{x_2}{x_0}\right)^2} - 2}.$$

Выбрав из удобства размещения радиус r_0 легко определить массу противовеса, и наоборот, задавшись массой противовеса, определить радиус его установки противовеса найдем разность

$$P_1^2 - P_2^2 = 4P_0P_k \cos \alpha,$$

отсюда

$$\cos \alpha = \frac{P_1^2 - P_2^2}{4P_0P_k} = \frac{\left(\frac{P_1}{P_0}\right)^2 - \left(\frac{P_2}{P_0}\right)^2}{4\frac{P_0}{P_k}} = \frac{\left(\frac{P_1}{P_0}\right)^2 - \left(\frac{P_2}{P_0}\right)^2}{4\frac{1}{1,414}\sqrt{\left(\frac{P_1}{P_0}\right)^2 + \left(\frac{P_2}{P_0}\right)^2} - 2} = 0,354 \frac{\left(\frac{x_1}{x_0}\right)^2 - \left(\frac{x_2}{x_0}\right)^2}{\sqrt{\left(\frac{x_1}{x_0}\right)^2 + \left(\frac{x_2}{x_0}\right)^2} - 2}.$$

Так как при вычислении корня получаются два знака, то угол может быть острым или тупым. Следует проверять оба значения угла. При этом, если применяют противовес (создают силу, противоположную P_0), то угол α откладывают от второго положения корректирующей массы; если удаляется излишняя масса (например, высверливанием), то угол α отсчитывается от первого положения корректирующей массы, рис. 11, д.

Правильное положение противовеса устанавливается путем контрольного разгона ротора и замера его амплитуды. Если она близка к нулю, установка правильна.

Следует учесть, что при значительной неуравновешенности ротора пропорциональность между максимальной амплитудой и величиной неуравновешенности для системы Б.В. Шитикова нарушается.

Однако задача уравнивания все же может быть решена, только приходится выполнять несколько приближений (грубое приближение, при котором исключается значительная неуравновешенность, и более точные, при которых устраняется оставшаяся неуравновешенность и при которых вышеприведенные зависимости уже справедливы).

Проведя балансировку в плоскости I , ротор представляют так, чтобы вместо плоскости I , заняла плоскость II и снова проводят балансировку. Процесс балансировки при этом совершенно аналогичен описанному выше.

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 5

Определение момента инерции и положения центра масс тела методом физического маятника

Работа заключается в определении положения центра масс и момента инерции шатуна относительно оси, перпендикулярной к плоскости его движения и проходящей через центр масс.

Содержание и порядок проведения работы

1. Испытуемое звено-шатун подвесить на призму лабораторной установки и отклонить от вертикального положения на угол 3–5, после чего звено станет совершать свободные колебания (трение в опоре не учитывается).

2. С помощью секундомера отсчитать время t двадцати полных колебаний звена. Для большей точности время t отсчитывается три раза и в расчет принимается его среднее значение t_c . В этом случае полный период колебаний

$$T_1 = \frac{t_c}{20}, \text{ с.}$$

3. Испытуемое звено подвесить на призму лабораторной установки другим концом и аналогично определить период колебаний T_2 .

4. Определить координату l_1 центра масс S .

5. Определить момент инерции звена I .

Результаты измерений и расчета занести в протокол.

Оборудование, инструменты, принадлежности

1. Шатун.
2. Опорная призма.
3. Измерительная линейка.
4. Секундомер.

Краткие сведения об инертности тела при вращательном движении и сущности метода физического маятника

Момент инерции тела относительно какой-либо оси является мерой инертности массы тела при вращательном движении. Давая определение этому понятию, можно сказать, что моментом инерции называется способность тела сопротивляться изменению скорости вращательного движения.

Момент инерции I относительно какой-либо оси определяется следующим образом

$$I = \int_m \rho^2 dm,$$

где dm — элементарная масса, кг;
 ρ — расстояние этой элементарной массы до рассматриваемой оси, м.

В ряде случаев практики определение моментов инерции звеньев целесообразно производить экспериментально, поскольку аналитическое определение отличается большой трудоемкостью. Одним из методов экспериментального определения положения центра масс и момента инерции звеньев удлиненной формы является метод физического маятника. Для этого испытуемое тело подвешивается на призме (рис. 12) и отклоняется на некоторый угол φ от вертикали. Будучи отпущено, это тело под действием силы тяжести начинает качаться.

Обозначим I_1 — момент инерции тела относительно оси, проходящей через точку опоры O_1 ($\text{кг} \cdot \text{м}^2$); m — масса тела (кг); G — вес тела (Н); l_1 — расстояние от центра S масс тела до точки опоры O_1 (м); φ — угол отклонения тела от вертикали (рад); ε — угловое ускорение тела ($\text{рад}/\text{с}^2$).

Пренебрегая трением в опоре о призму и о воздух, можно записать, что на тело действует момент (рис. 12)

$$M_{01} = -mgl_1 \sin \varphi.$$

Вследствие разного направления момента M_{01} и угла φ в правой части поставлен знак минус.

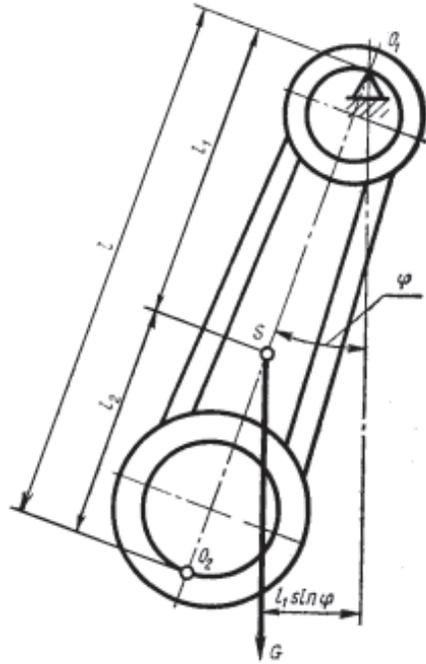


Рис. 12

По второму закону Ньютона для вращательного движения

$$M_{01} = I_1 \varepsilon = I_1 \frac{d^2 \varphi}{dt^2}.$$

Сопоставляя эти формулы, получаем дифференциальное уравнение движения

$$\frac{d^2 \varphi}{dt^2} + \frac{mgl_1}{I_1} \sin \varphi = 0.$$

Если амплитуды колебаний малы (до 10°), то $\sin \varphi \approx \varphi$ и тогда

$$\frac{d^2 \varphi}{dt^2} + \frac{mgl_1}{I_1} \varphi = 0.$$

Обозначим

$$\frac{mgl_1}{I_1} = q^2,$$

тогда

$$\frac{d^2 \varphi}{dt^2} + q^2 \varphi = 0.$$

Интегралом такого дифференциального уравнения является

$$\varphi = A \sin(qt + B),$$

где A и B — произвольные постоянные.

Для нахождения произвольных постоянных A и B рассмотрим начальные условия решаемой задачи.

Примем момент пуска секундомера за начало отсчета времени $t = 0$, когда угол φ имеет максимальную величину, тогда

$$\varphi_0 = A \sin B,$$

что возможно только при $A = \varphi_0$ и $B = \frac{\pi}{2}$. При этом условии

$$\varphi = \varphi_0 \sin\left(qt + \frac{\pi}{2}\right) = \varphi_0 \cos qt.$$

Уравнение является уравнением гармонического колебания с начальной амплитудой φ_0 и угловой частотой q . Одинаковая фаза колебаний повторится через период T , т. е.

$$\varphi = \varphi_0 \cos qt = \varphi_0 \cos[q(t + T)],$$

откуда следует, что $qt = 2\pi$, или период этих колебаний (время двойного размаха)

$$T = \frac{2\pi}{q}.$$

Обозначив период колебаний относительно точки O_1 через T_1 и учтя ранее полученные выражения, запишем:

$$T_1 = \frac{2\pi}{q} = 2\pi \sqrt{\frac{I_1}{mgl_1}},$$

откуда

$$I_1 = mgl_1 \frac{T_1^2}{4\pi^2}.$$

Чтобы определить размер l_1 , определяющий положение центра масс тела, повторим опыт, подвесим его за точку O_2 .

В результате повторения эксперимента получим момент инерции относительно новой опорной точки O_2 :

$$I_2 = mgl_2 \left(\frac{T_2}{2\pi}\right)^2,$$

где T_2 — период колебаний при качании относительно точки O_2 .

Расстояние $l = l_1 + l_2$ между точками O_1 и O_2 можно измерить, а момент инерции I_1 и I_2 выразить через момент инерции I относительно оси, проходящей через центр масс, с помощью известной теоремы Штейнера:

$$I_1 = I + ml_1^2; \quad I_2 = I + ml_2^2.$$

Заменим I_1 и I_2 выше приведенными выражениями, получим:

$$mgl_1 \left(\frac{T_1}{2\pi}\right)^2 = I + ml_1^2; \quad mgl_2 \left(\frac{T_2}{2\pi}\right)^2 = I + ml_2^2.$$

Подставив $l_2 = l - l_1$ и вычтя из первого уравнения второе, получим:

$$g \left[l_1 \left(\frac{T_1}{2\pi}\right)^2 - (l - l_1) \left(\frac{T_2}{2\pi}\right)^2 \right] = l_1^2 - (l - l_1)^2,$$

откуда координата центра масс

$$l_1 = \frac{l}{1 + \frac{l - g\left(\frac{T_1}{2\pi}\right)^2}{l - g\left(\frac{T_2}{2\pi}\right)^2}}.$$

Из формулы $I = I_1 - ml_1^2$, подставив $I_1 = mgl_1 \left(\frac{T_1}{2\pi}\right)^2$ найдем

момент инерции тела относительно оси, проходящей через его

центр масс $I = ml_1 \left[g \left(\frac{T_1}{2\pi}\right)^2 - l_1 \right]$.

ПРИЛОЖЕНИЯ

Лабораторная работа № 1
Структурный анализ плоских механизмов
Кинематическая схема механизма

Характеристика кинематических пар

№ п/п	Обозначение пары на кинематической схеме	Номера звеньев, образующих пару	Вид, класс пар
1			
2			
3			
4			
5			
6			
7			
8			
9			

Число степеней свободы механизма

$$W = 3n - 2p_5 - p_4 =$$

Анализ особенностей структуры механизма

Формулы строения механизма: I (1) →

Размеры звеньев механизма, мм

1. _____ 2. _____ 3. _____
4. _____ 5. _____ 6. _____
7. _____ 8. _____ 9. _____

План механизма в масштабе и структурные группы Ассура

$$K_l = \frac{m}{mm}$$

Лабораторная работа № 2

Определение параметров эвольвентного зубчатого колеса

Схема измерения

Работа проверена

Работу выполнил

Преподаватель _____ (ФИО)
(подпись, дата)

Студент _____ (ФИО)

Шифр _____

Число зубьев колеса, $z =$

Число зубьев для измерения основного шага, $n =$

Результаты измерений

№ п/п	W_n , мм	W_{n+1} , мм
1		
2		
3		
Среднее		

Шаг по дуге основной окружности, мм:

$$p_g = W_{n+1} - W_n =$$

Расчетное значение модуля, мм:

$$m = \frac{p_g}{\pi \cos \alpha} =$$

Уточненное значение модуля по ГОСТу, $m =$ мм

Фактическая толщина зуба по основной окружности

$$S_g^* = W_{n+1} - np_g =$$

Расчетная толщина зуба по основной окружности нулевого колеса

$$S_g = d_g \left(\frac{\pi m}{2d} + \operatorname{inv} \alpha_p \right) =$$

Коэффициент сдвига

$$\chi = \frac{S_g^* - S_g}{2m \sin \alpha} =$$

Расчетные параметры зубчатого колеса

$$d = mz =$$

$$d_g = d \cos \alpha =$$

$$d_a = mz + 2m + 2\chi m =$$

$$d_f = mz - 2,5m + 2\chi m =$$

Измеренные значения параметров зубчатого колеса:

$$d_a =$$

$$d_f =$$

Выводы:

Работа проверена

Работу выполнил

Преподаватель _____ (ФИО)
(подпись, дата)

Студент _____ (ФИО)

Шифр _____

Лабораторная работа № 3

Построение эвольвентных профилей методом обката

Схема прибора

Исходные величины:

Модуль рейки, $m =$ мм

Угол профиля рейки, $\alpha = 20^\circ$

Коэффициент высоты головки, $f = 1$

Диаметр делительной окружности, $d =$ мм

Коэффициент сдвига:

$$\chi_1 = 0$$

$$\chi_2 = \text{мм (см. расчет)}$$

$$\text{Сдвиг рейки } b = \chi_2 \cdot m = \text{мм}$$

$$d_1 = d_2; \quad d_{e1} = d_{e2}$$

Результаты расчетов и измерения

Элементы колес и зацепления	Обозначение	Расчетные формулы	Расчет	
1	2	3	4	
Радиус делительной окружности	r	$0,5 mz$		
Радиус основной окружности	r_o	$0,5mz \cos \alpha = r \cos \alpha$		
Шаг по делительной окружности	p	πm		
Шаг по основной окружности	p_o	$\pi m \cos \alpha = p \cos \alpha$		
Коэффициент сдвига	χ_2	$(17 - z) / 17$		
Радиус окружности впадин	r_f	$0,5mz - 1,25m + \chi m$	$\chi_1 = 0$	$r_{f1} =$
			$\chi_2 =$	$r_{f2} =$

Окончание табл.

1	2	3	4	
Радиус окружности выступов	r_a	$0,5 mz + m + xm$	$\chi_1 = 0$	$r_{a1} =$
			$\chi_2 =$	$r_{a2} =$ Измерения
Толщина зуба по делительной окружности	S	$0,5 \pi m + 2mx \operatorname{tg} \alpha$	$\chi_1 = 0$	$S_1 =$
			$\chi_2 =$	$S_2 =$
Толщина зуба по основной окружности	S_e	$2r_e \left(\frac{S}{2r} + \operatorname{inv} \alpha \right)$	$\chi_1 = 0$	$S_{e1} =$
			$\chi_2 =$	$S_{e2} =$
Угол зацепления в сборке	α_w	$\operatorname{inv} \alpha_w = \operatorname{inv} \alpha + 2 \frac{x_1 + x_2}{z_1 + z_2} \operatorname{tg} \alpha$		
Межцентровое расстояние	A	$A = \frac{m}{2} (z_1 + z_2) \frac{\cos \alpha}{\cos \alpha_w}$		
Коэффициент перекрытия	ε	$\frac{\sqrt{r_{a1}^2 - r_{a1}^2} + \sqrt{r_{a2}^2 - r_{a2}^2} - A \sin \alpha_w}{\pi m \cos \alpha}$		

Лабораторная работа № 4
Полное уравнивание вращающихся тел
Схема установки

Корректирующая масса и радиус ее установки

Работа проверена

Работу выполнил

$m_k =$

Преподаватель _____ (ФИО) Студент _____ (ФИО)
(подпись, дата)

$r_k =$

Шифр _____

Результаты измерения

Амплитуда, мм	1	2	3	Среднее значение χ
χ_0				
χ_1				
χ_2				

$$m_0 r_0 = \frac{1,414 m_k r_k}{\sqrt{\left(\frac{x_1}{x_0}\right)^2 + \left(\frac{x_2}{x_0}\right)^2 - 2}} =$$

$$\cos \alpha = 0,354 \frac{\left(\frac{x_1}{x_0}\right)^2 - \left(\frac{x_2}{x_0}\right)^2}{\sqrt{\left(\frac{x_1}{x_0}\right)^2 + \left(\frac{x_2}{x_0}\right)^2 - 2}} =$$

Масса противовеса $m_n =$;

радиус установки противовеса $r_n =$

$$\alpha_1 = \chi_3 =$$

$$\alpha_2 = \chi_4 =$$

Угол установки противовеса $\alpha_n =$.

Работа проверена

Работу выполнил

Преподаватель _____ (ФИО) Студент _____ (ФИО)
 (подпись, дата)

Шифр _____

Лабораторная работа № 5

Определение момента инерции и положения центра масс тела
методом физического маятника

Схема установки

Параметры

Тело № _____

Расстояние l _____ м

Масса тела m _____ кг

Результаты наблюдений колебаний тела

Время 20 полных колебаний, с		
№ п/п	Первое положение тела	Перевернутое положение тела
1		
2		
3		
Среднее		
Время одного колебания, с	$T_1 =$	$T_2 =$

Результаты вычислений

$$I_1 = \frac{l}{1 + \frac{l - g \left(\frac{T_1}{2\pi} \right)^2}{l - g \left(\frac{T_2}{2\pi} \right)^2}} =$$

ТЕОРИЯ МЕХАНИЗМОВ И МАШИН

Методические указания
по выполнению лабораторных работ

Редактор *В.К. Тихонычева*
Компьютерная верстка *Н.Ф. Цыганова*

Тип. зак.	Изд. зак. 232	Тираж 2 000 экз.
Подписано в печать 14.04.04	Гарнитура Times.	Офсет
Усл. печ. л. 3,75		Формат 60×90 ¹ / ₁₆

Издательский центр РГОТУПСа,
125993, Москва, Часовая ул., 22/2

Типография РГОТУПСа, 125993, Москва, Часовая ул., 22/2