РОССИЙСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ОТКРЫТЫЙ
ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ПУТЕЙ СООБЩЕНИЯ

13/9/11

Одобрено кафедрой
«Локомотивы и локомотивное
хозяйство»

ОСНОВЫ ИНЖЕНЕРНОЙ И НАУЧНОЙ РАБОТЫ

Руководство к выполнению лабораторных работ
для студентов IV курса

специальности

150700 ЛОКОМОТИВЫ (Т)

специализации

150702 УПРАВЛЕНИЕ ТЕХНИЧЕСКОЙ ЭКСПЛУАТАЦИЕЙ
ЛОКОМОТИВОВ

РГОТУПС

Москва – 2005

С о с т а в и т е л и: канд. техн. наук, доц. М.А. Ибрагимов,
канд. техн. наук, доц. В.Д. Шаров

Р е ц е н з е н т — канд. техн. наук, доц. А.В. Скалин

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Настоящее руководство используется для проведения лабораторных работ. Оно является одновременно образцом для написания отчета о лабораторных работах, который должен быть составлен в соответствии с требованиями действующих стандартов и норм, регламентирующих оформление научно-технической документации на производстве. Журнал лабораторных работ должен быть выполнен в виде тетради, состоящей из листов писчей бумаги формата А4 (210 × 297 мм).

Перед началом выполнения лабораторной работы студент должен изучить раздел «Предварительные сведения» о лабораторной работе. Степень подготовленности каждого студента к выполнению работы (его допуск к лабораторной работе) оценивается преподавателем перед началом занятия путем опроса.

Лабораторные работы проводятся в кабинете компьютерных технологий кафедры «Локомотивы и локомотивное хозяйство». Индивидуальные задания выдаются каждому студенту перед началом проведения лабораторных работ.

Лабораторная работа № 1

МОДЕЛИРОВАНИЕ ИЗМЕНЕНИЯ ТЕХНИЧЕСКОГО СОСТОЯНИЯ ОБЪЕКТОВ ЭКСПЛУАТАЦИИ И ПРОГНОЗИРОВАНИЕ ИХ НАДЕЖНОСТИ

Предварительные сведения

В настоящей лабораторной работе рассматриваются вопросы прогнозирования постепенных отказов.

К *постепенным отказам* можно отнести ухудшение технического состояния, связанное с накоплением качественных изменений (износ, старение, фазовые и структурные превращения), при этом техническое состояние ухудшается постепенно, а затем переходит в предотказное состояние. *Возможность прогнозирования постепенных отказов* облегчает переход на эксплуатацию изделия «по состоянию». В данной лабораторной работе рассматривается *инструментальный подход прогнозирования*, включающий измерение параметров и снятия характеристик, позволяющих оценить техническое состояние устройства. Такая оценка предусматривает сравнение с эталонным значением и позволяет предсказать возможность появления неисправности в эксплуатации до следующей проверки. Разработка новых методов инструментального прогнозирования и отыскание новых параметров, позволяющих прогнозировать появление неисправности — важнейшие задачи обеспечения высокой эксплуатационной надежности локомотивов. В лабораторной работе инструментальный подход реализуется замерами геометрических характеристик изделия во времени и сравнении их с эталонным значением.

Пусть контролируемый параметр агрегата представляет собой функцию $X(t)$, которая в течение времени $0 - T_A$ эксплуатации принимает в моменты контроля $t_1, t_2, ..., t_A$ значения $x_1(t_1)$, $x_2(t_2)$, ..., $x_A(t_A)$. *Смысл прогнозирования* состоит в том, чтобы предсказать значения параметра $x(t)$ для будущих моментов времени по известным значениям $x_0, x_1, x_2, ..., x_A$ в прошлом (рис. 1.1). Это возможно при монотонном изменении параметра $x(t)$.

Определив значение функции $x(t)$ на участке $0 - t_A$ можно продлить кривую (прямую) $x(t)$ до интересующего значения X_K для времени $t > t_A$ на участке (t_A, t_K). При этом предпочтительна линейная экстраполяция на относительно короткий участок времени (t_A, t_K). Достаточно часто в рассматриваемом диапазоне можно принять линейное изменение функции $x(t)$ и соответственно линейную экстраполяцию, что и делается в настоящей лабораторной работе. В общем случае значения x_1, x_2, ..., x_A носят случайный характер с учетом отношений параметров и погрешностей замеров. Построение функции $x(t)$ производится с использованием *метода «наименьших квадратов»*, по которому уравнение прямой $x(t)$ выбирается таким образом, что сумма квадратов отклонений текущих значений x_i от прямой $x(t)$ будет наименьшей. Под *прогнозированием отказов* понимают научно-обоснованное предсказание моментов воз-

Рис. 1.1. Прогнозирование значений $x(t)$

никновения отказов на основе данных проведенных испытаний, изменений или наблюдений.

Математическая обработка данных замеров

Пусть имеется n-пар значений двух случайных величин $X(x_1, x_2, ..., x_n)$ и $T(t_1, t_2, ..., t_n)$. Назовем *средней арифметической дисперсией* (или выборочной средней, или математическим ожиданием) величины X сумму

$$m_x = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i, \tag{1}$$

и *выборочной дисперсией* величин X сумму

$$\sigma_x^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - m_x\right)^2 \quad (\text{при } n > 30), \tag{2'}$$

или

$$\sigma_x^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - m_x\right)^2 \quad (\text{при } n \le 30). \tag{2}$$

Зачастую количество данных $n < 30$, поэтому далее будем пользоваться формулой (2).

Аналогично определяется средняя арифметическая и выборочная дисперсия величины Т:

$$m_t = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} t_i, \quad \sigma_t^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(t_i - m_t\right)^2. \tag{3}$$

Ковариацией случайных величин X и T называется сумма

$$\text{cov}\,(X, T) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - m_x\right)\left(t_i - m_t\right). \tag{4}$$

Формулы по расчету выборочной дисперсии и ковариации после преобразований приводятся к виду

$$\sigma_x^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \frac{n}{n-1} m_x^2,$$

$$\sigma_t^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n} t_i^2 - \frac{n}{n-1} m_t^2, \tag{5}$$

$$\operatorname{cov}(T, X) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i t_i - m_x m_t.$$

Коэффициентом корреляции двух случайных величин X и T называется величина

$$k = \frac{\operatorname{cov}(X,T)}{\sigma_x \cdot \sigma_t}. \tag{6}$$

Допустим, в результате замеров, мы получим ряд значений величин X и T. Нам требуется определить наличие зависимости между ними, или степень их стохастической связи. Ее можно проиллюстрировать диаграммой рассеивания, которую строят следующим образом. На плоскости в системе координат TOX строят точки, координатами которых являются наблюдаемые значения случайных величин T и X (рис. 1.2). Точки на диаграмме рассеивания группируются вблизи некоторой прямой и чем ближе связь между наблюдаемыми случайными величинами, тем теснее точки лежат к прямой, чем слабее связь, тем больше разброс точек.

Некоторую информацию о характере связи случайных величин T и X дает ***коэффициент корреляции*** K (формула (6)). Значения коэффициента корреляции лежат между $-1 \le K \le 1$, и $K = \pm 1$ лишь в случае, если все наблюдаемые значения T и X лежат на некоторой прямой в плоскости TOX. По мере приближения коэффициента K к величине ± 1 распределение имеет тенденцию концентрироваться вблизи некоторой прямой, что можно считать мерой близости к линейной зависимости между T и X. Если $K = 0$, то говорят, что T и X не коррелированны, в частности это, будет тогда, когда величины независимы.

Прямая, вокруг которой наиболее плотно концентрируются точки (t_i, x_i) эксперимента, называется *прямой регрессии*. Уравнение ее имеет вид

$$\tilde{X} = a + bT. \tag{7}$$

Коэффициенты a и b получают по методу наименьших квадратов

$$b = \frac{\text{cov}(T, x)}{\sigma_t^2}, \quad a = m_x - bm_t. \tag{8}$$

При этом сумма квадратов отклонений величины $\tilde{X}$, рассчитанных по формуле (7) от экспериментальных X будет наименьшей.

Коэффициент b при T в уравнении регрессии (или тангенс угла наклона этой прямой к оси OT) называется *коэффициентом регрессии переменной* X по T, $r_{x/T}$

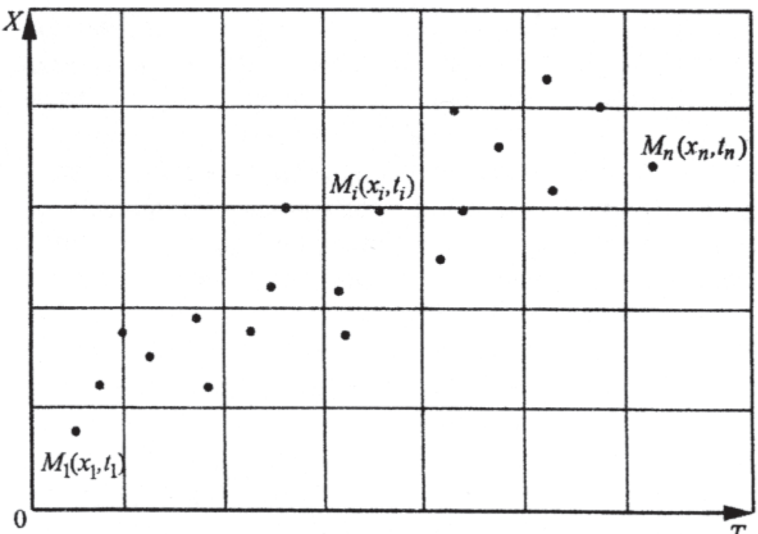

Рис. 1.2. Диаграмма рассеивания, иллюстрирующая наличие связи между величинами X и T

Можно установить из формул (8) и (6) его связь с коэффициентом корреляции:

$$r_{x/T} = b = k \cdot \frac{\sigma_x}{\sigma_t}. \tag{9}$$

Поскольку при малом количестве значений T и X (при малой выборке) мы можем лишь приближенно судить о коэффициентах регрессии и корреляции, то необходимо определить интервалы, в которых они могут находиться. Представление о точности вычисленного значения $\tilde{X}$ по сравнению с действительным X дает понятие доверительного интервала.

Пусть для каждого достаточно малого $\alpha > 0$ можно указать такое $\sigma > 0$, у которого вероятность того, что рассматриваемая величина X попадает в интервал $\tilde{X} - \sigma < X < \tilde{X} + \sigma$ или ($|X - \tilde{X}| < \sigma$) будет равна $1 - \alpha$:

$$P(|X - \tilde{X}| < \sigma) = P(\tilde{X} - \sigma < X < \tilde{X} + \sigma) = 1 - \alpha. \tag{10}$$

Чем меньше для данного α будет σ, тем точнее оценка $\tilde{X}$. Интервал ($\tilde{X} - \sigma$, $X + \sigma$) называют *доверительным интервалом*, отвечающим доверительной вероятности $1 - \alpha$ (или доверительным интервалом с $\alpha \cdot 100\%$ уровнем).

Если условиться, что случайные величины T и X распределены по закону, близкому к нормальному, то доверительные интервалы с $q\%$-м уровнем для эмпирических коэффициентов корреляции и регрессии будут следующими

$$\tilde{\kappa} - t_q \frac{1 - \tilde{\kappa}^2}{\sqrt{n}} < \kappa < \tilde{\kappa} + t_q \frac{1 - \tilde{\kappa}^2}{\sqrt{n}}, \tag{11}$$

$$\tilde{r} - t_q \frac{\sigma_x}{\sigma_t} \frac{1 - \tilde{\kappa}^2}{\sqrt{n}} < r < \tilde{r} + t_q \frac{\sigma_x}{\sigma_t} \frac{1 - \tilde{\kappa}^2}{\sqrt{n}}, \tag{12}$$

где $\tilde{\kappa}$, $\tilde{r}$ — соответственно значения коэффициентов корреляции и регрессии, рассчитанных по формулам (6) и (9);

n — количество наблюдаемых пар значений (t_i, x_i);

t_q — значение аргумента функции Лапласа [1], соответствующего вероятности $p = 1 - \frac{q}{100}$.

Порядок выполнения работы

1. Изучить конструкцию колесной пары и технологию ее технического обслуживания.

2. Провести анализ неисправностей и отказов колесных пар и причин их возникновения.

3. Из тетради техника по замерам выбрать данные по замерам износа одной колесной пары.

Данные замеров свести в табл. 1.1.

Таблица 1.1

Износ поверхности катания колесной пары тепловоза

Пробег, тыс. км		5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
Износ поверхности катания, мм	Левое колесо										
	Правое колесо										

4. Провести математическую обработку полученных результатов с построением прямой приближенной регрессии.

5. Проанализировать полученные результаты и провести линейную экстраполяцию регрессии с определением пробега при котором наступает предотказное состояние.

Пример расчета

Измеряют износ детали X (мм) в зависимости от времени ее работы T (тыс. ч). Деталь снимают с эксплуатации, если ее износ достигает, например 1,5 мм. Обработать данные замеров, построить прямую регрессии и определить время работы детали до снятия с эксплуатации, а также доверительный интервал для этого времени с 20%-м уровнем.

Данные замеров и последующие расчеты сводятся в табл. 1.2.

Таблица 1.2

Вспомогательная таблица для расчетов коэффициентов регрессии

N	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	$\sum$
T	3,3	3,4	4,3	5,4	6,7	8,7	10,6	11,2	11,5	12,8	77,2
X	0,44	0,45	0,58	0,68	0,81	1,05	1,27	1,31	1,42	1,58	9,59
T^2	10,89	11,56	18,49	29,16	44,89	75,69	112,3	125,4	132,2	146,4	707,1
X^2	0,1936	0,2025	0,3364	0,4624	0,6561	1,1025	1,6129	1,7161	2,0164	2,4964	10,79
$T\cdot X$	1,452	1,53	2,494	3,672	5,427	9,135	13,462	14,672	16,33	19,12	87,3

Характеристики распределения вычисляют следующим образом.

1. Суммируют данные второй строки таблицы и делят на n (в нашем случае $n = 10$), получают $m_t = \dfrac{77,12}{10} = 7,72$.

2. Суммируют данные третьей строки таблицы и делят на n, получают $m_x = 0,959$.

3. Суммируют данные четвертой строки, делят на $(n - 1)$ и отнимают от результата $\dfrac{n}{n-1}m_t^2$, получают (см. формулы (5))

$$\sigma_t^2 = \frac{707,1}{9} - \frac{10}{9}(7,72)^2 = 12,35.$$

4. Суммируют данные пятой строки, делят на $(n - 1)$ и отнимают $\dfrac{n}{n-1}m_x^2$, получают $\sigma_x^2 = 0,1776$.

5. Суммируют данные шестой строки, делят на n и отнимают $m_x \cdot m_t$, получают $\operatorname{cov}(X, T) = 1,326$.

6. Вычисляют

$$\sigma_t = \sqrt{12,35} = 3,514,$$

$$\sigma_x = \sqrt{0,1776} = 0,4214,$$

$$\tilde{\kappa} = 0,895,$$

$$\tilde{r} = \tilde{\kappa} \cdot \frac{\sigma_x}{\sigma_t} = 0,1074,$$

$$a = m_x - \tilde{r} \cdot m_t = 0,1302.$$

Окончательно уравнение регрессии имеет вид

$$\tilde{X} = 0,1302 + 0,1074T. \qquad (13)$$

Подсчитаем доверительные интервалы для коэффициентов корреляции и регрессии с 20%-м уровнем (см. формулы (11), (12)). По таблице значений функции Лапласа найдем, что для $p = 1 - \frac{20}{100} = 0,8,\ t_q = 1,28.$ Следовательно

$$0,895 - 1,28 \cdot \frac{1-(0,895)^2}{\sqrt{10}} < \kappa < 0,895 + 1,28 \frac{1-(0,895)^2}{\sqrt{10}},$$

$$0,1074 - \frac{0,4214}{3,514} \cdot 0,0819 < r < 0,1074 + \frac{0,4214}{3,514} \cdot 0,0813$$

или

$$0,8137 < \kappa < 0,9763,$$

$$0,09776 < r < 0,11704.$$

Поскольку коэффициент корреляции близок к 1, то можно говорить о достаточно близкой к линейной зависимости между случайными величинами T и X. Это можно увидеть на графике (рис. 1.3). Коэффициент регрессии $r > 0$ поэтому с увеличением T случайная величина X растет. Если с увеличением T X уменьшается, то $r < 0$. По построенной прямой можно прогнозировать значения случайной величины X и за пределами данного интервала изменения величины T, то есть при $T > 12,1$ или $T < 3,3$.

Для этого нужно определить доверительные интервалы для каждого значения величины X, соответствующей данному T.

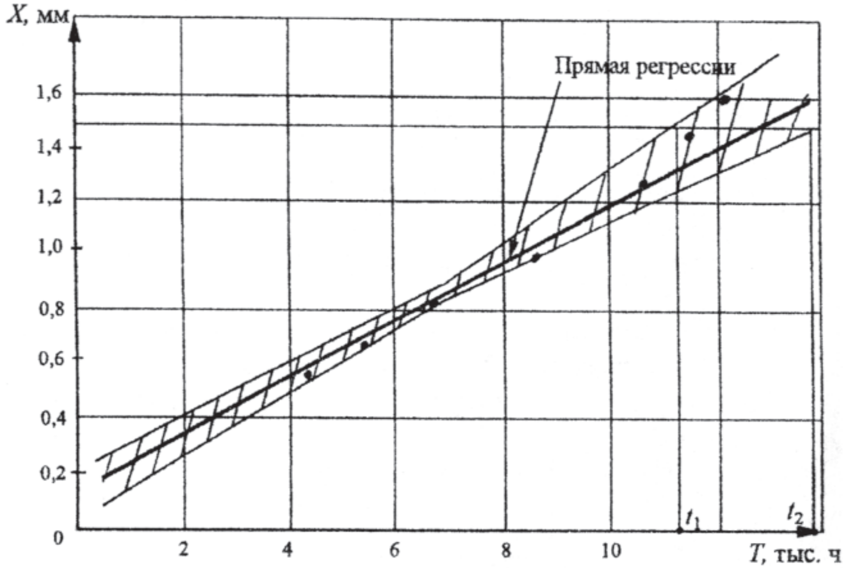

Рис. 1.3. График прямой регрессии и доверительной области для данных табл. 1.2

При нормальном законе распределения их можно оценить следующей формулой

$$\tilde{X} - t_q \cdot S \cdot Q < X < \tilde{X} + t_q \cdot S \cdot Q, \qquad (14)$$

где

$$S = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \tilde{X}_i\right)^2,$$

$$Q = \sqrt{\frac{1}{n} + \frac{\left(t - m_t\right)^2}{(n-1)\sigma_t^2}},$$

здесь $X_i, \tilde{X}_i$ — наблюдаемые и вычисленные по формуле (13) значения случайной величины X;

tg — аргумент функции Лапласа для доверительного интервала с q-м % уровнем.

Из формулы (14) видно, что чем дальше удалена случайная величина T от ее математического ожидания m_t, тем больше будет доверительный интервал для оценки X, т.е. тем значительнее снижается точность результатов расчета. Наименее надежная оценка по прямой регрессии будет получаться для ординат с абсциссами, наиболее удаленными от среднего значения m_t. Поэтому найденную прямую возможно использовать для экстраполирования за пределами того промежутка, внутри которого помещаются наблюдаемые значения, лишь соблюдая большую осторожность. Рассчитав доверительные интервалы для случайной величины X (по формуле (14)) для ближайших к m_t значений $t = 6{,}7$ и $t = 8{,}7$ и для наиболее удаленных $t = 3{,}3$ и $t = 12{,}1$ и построив полученные значения на рис. 1.3, получим полосу, в которой с доверительной вероятностью $p = 0{,}8$ будут лежать значения случайной величины X. Эта полоса на рис. 1.3 заштрихована.

Проведя прямую, параллельную оси $0T$ через $X = 1{,}5$ на графике (см. рис. 1.3), получим, что искомый интервал времени до снятия детали с эксплуатации $11{,}65 < T < 13{,}6$.

Для выполнения расчетов все вычисления удобно свести в табл. 1.3.

Таблица 1.3

Таблица вспомогательных расчетов

№ п/п	t_i	X_i	t_i^2	X_i^2	$X_i t_i$	$\tilde{X}_i$	$X_i - \tilde{X}_i$	$(X_i - \tilde{X}_i)^2$
1	t_1	X_1						
2	t_2	X_2						
…								
n	t_n	X_n						
$\sum_{i=1}^{n}$								

Содержание отчета

После выполнения работы составить отчет, который должен содержать.

1. Наименование работы и цель работы.

2. Краткое описание сущности инструментального метода прогнозирования.

3. Особенности технического обслуживания колесных пар локомотивов; анализ причин возникновения неисправностей и отказов.

4. Результаты замеров износа поверхности катания колесной пары.

5. Результаты математической обработки данных замеров износа поверхности катания.

6. График прямой регрессии и доверительной области с определением пробега при котором достигается предотказное состояние.

7. Выводы.

Контрольные вопросы

1. В чем состоит инструментальный метод прогнозирования?

2. Что такое корреляция и коэффициент корреляции двух случайных величин?

3. В чем физическая сущность процесса ухудшения технического состояния исследуемого образца?

Лабораторная работа № 2

ОПТИМИЗАЦИЯ ТЕХНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ МЕТОДОМ НЕЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Предварительные сведения

Задачи принятия оптимальных решений в управлении, при проектировании ТС и их эксплуатации, в современных технологиях занимают ключевое место. *Оптимальное решение* — это наилучшее. Но решение наилучшим во всех смыслах быть не может. Оно может быть наилучшим только в одном, строго установленном смысле. Принимающий решение должен точно представлять, в чем заключается оптимальность решения, т.е. по какому критерию (kriterion — греч. — мерило), принимаемое решение должно быть наилучшим. Такой критерий называют *целевой функцией*. В общем случае с помощью целевой функции можно оценивать качества как желательные (прибыль, производительность, мощность и т.п.), так и нежелательные (затрата, расход материалов, простои оборудования и т.п.). Тогда очевидно в первом случае нужно стремиться к *максимизации критерия*, а во втором — к его *минимизации*. Задача может иметь оптимальное решение, если она удовлетворяет двум требованиям:

- есть возможность иметь более одного решения, т.е. существуют **допустимые решения**;
- имеется критерий, показывающий в каком смысле принимаемое решение должно быть оптимальным.

Процесс принятия решений может быть неформализованным или формализованным.

Принятие неформализованных решений — это творчество, искусство при котором доказательство носит интуитивный характер.

Реализация методов формализованных решений происходит по четким правилам и рекомендациям.

Принятие формализованных решений базируется на двух основных методах:

- логическое моделирование (нами не рассматривается)
- оптимизация.

В свою очередь *процесс оптимизации* обычно содержит три этапа:

- исходные данные.
- составление математической модели;
- решение задачи;

При составлении *математической модели* необходимо придерживаться трех правил:

- учитывать главные свойства моделируемого объекта;
- пренебрегать второстепенными свойствами объекта;
- отделять главные свойства от второстепенных.

Не всегда легко отделить главное от второстепенного и составить приемлемую модель. Составление модели — это искусство. Для этого требуются соответствующие знания и творческие способности.

Если модель описывает зависимость между исходными данными, то *алгоритм* представляет собой последовательность действий, которые необходимо выполнить, чтобы от исходных данных перейти к искомым величинам. Можно считать, что алгоритм это метод решения. Часто алгоритм задач принятия решений настолько сложен, что без применения компьютера, реализовать его практически невозможно.

Исходные данные должны быть достоверными. Здесь уместна пословица — «Что посеешь, то и пожнешь». Т.е. никакая хорошая сходимость алгоритма или возможность средств вычислительной техники, не заменят достоверности исходных данных.

В настоящее время разработан ряд методов оптимизации, которые применяются в зависимости от характера целевой функции и особенностей решаемой задачи, методы оптимизации:

- линейное программирование;
- нелинейное программирование;

- целочисленное программирование;
- стохастическое программирование;
- методы многокритериальной оптимизации.

Рассмотрим общий случай задачи оптимизации. Для этого следует остановиться на базовых понятиях.

1. *Целевая функция* или критерий оптимизации. Возможны три вида назначения целевой функции

Максимизация критерия

$$F = f(x_1, x_2, ..., x_m) \to \max, \tag{2.1}$$

где $x_1, x_2, ..., x_m$ — искомые переменные, определяющие целевую функцию.

Минимизация критерия

$$F = f(x_1, x_2, ..., x_m) \to \min. \tag{2.2}$$

Назначение заданного значения

$$F = f(x_1, x_2, ..., x_m) = F_{зад}, \tag{2.3}$$

где $F_{зад}$ — значение целевой функции, которое необходимо получить.

2. *Ограничения* устанавливают зависимость между переменными.

$$\begin{gathered} q_1(x_1, x_2, \ldots, x_m) \geq 0; \\ q_2(x_1, x_2, \ldots, x_m) \geq 0; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ q_n(x_1, x_2, \ldots, x_m) \geq 0; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ h_1(x_1, x_2, \ldots, x_m) = 0; \\ h_2(x_1, x_2, \ldots, x_m) = 0; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ h_к(x_1, x_2, \ldots, x_m) = 0. \end{gathered} \tag{2.4}$$

Ограничения могут быть односторонними $q_i(x_j) \le 0$ или двусторонними $a_i \le q_i(x_j) \le b_i$.

3. *Граничные условия* показывают в каких пределах могут быть значения искомых переменных в оптимальном решении:

$$x'_1 \le x_1 \le x''_1;\ x'_2 \le x_2 \le x''_2;\ \dots;\ x'_m \le x_m \le x''_m.$$

Решение задачи, удовлетворяющее всем ограничениям и граничным условиям является *допустимым*.

4. *Размерность задачи* оптимизации определяется числом переменных (m) и числом ограничений (n). Возможны три соотношения

$$n < m;\ n = m;\ n > m.$$

Опуская доказательство, отметим, что непременным требованием для задач оптимизации является ($m > n$).

Очевидно задачей оптимизации будет являться выбор только одного решения по определенному критерию. В общем случае постановка задачи оптимизации может быть записана так:

$$\left.\begin{array}{ll}
\text{Цел. Ф} & F = f(x_j) \to \max\ (\min, \text{const}). \\
 & q_1(x_j) \le (= \ge \text{i})\ b_1 \\
 & \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
\text{Ограничения.} & q_n(x_j) \le (=\ ;\ \ge)\ b_n \\
\text{Гр.условия.} & x'_j \le x_j \le x''_j;\ i = 1, n;\ j = 1, m
\end{array}\right\} \qquad (2.5)$$

Систему (2.5) принято записывать более компактно

$$\left.\begin{array}{l}
F = f(x_j) \to \max\ (\min, \text{const}). \\
q_i(x_j) \le b_i \\
x'_j \le x_j \le x''_j \\
i = 1, n;\ j = 1, m
\end{array}\right\} \qquad (2.6)$$

Решение задачи методом нелинейного программирования

Максимум и минимум функции объединяются понятием *экстремум*. Согласно определению признака экстремума функция $f(x)$ имеет максимум (минимум) в точке x^*, если в достаточной близости от этой точки всем значениям x соответствуют значения $f(x)$ меньше (больше), чем $f(x^*)$. Для случае максимума это показано на рис. 2.1, *а*. Максимум и минимум функции может быть как *локальным*, так и *глобальным*. На рис. 2.1, *б* функция $f(x)$ принимает максимальные значения в вершинах B и D. При этом $f(x_В) > f(x_Д)$. В таком случае говорят, что в точке B имеется глобальный максимум, а в точке D — локальный. Аналогичные рассуждения относятся к минимумам в точках A, C, E.

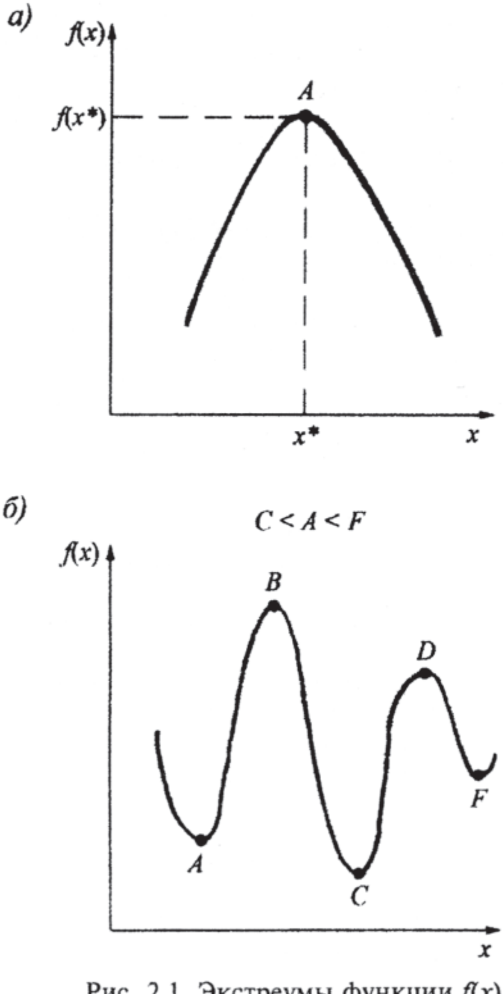

Рис. 2.1. Экстреумы функции $f(x)$

При введении граничных условий типа $x \le b$ показанных на рис. 2.2 наибольшее значение функции находится на границе в точке $x = b$. В таких случаях говорят, что в точке $x = b$ находится оптимум функции $f(b) = B$.

Оптимум более широкое понятие, чем экстремум. Если экстремум есть не у всех функций, то в практических задачах оптимум, как правило, есть всегда. Также как и экстремумы, оптимумы могут быть локальными и глобальными. Будем рассматривать нахождение только локального оптимума.

Задачи нелинейной оптимизации с точки зрения методов решения делятся на два класса:

- задачи безусловной оптимизации;
- задачи условной оптимизации (в общем случае имеет вид (2.5)).

Остановимся на решении задачи условной оптимизации. Есть целый ряд методов решения таких задач.

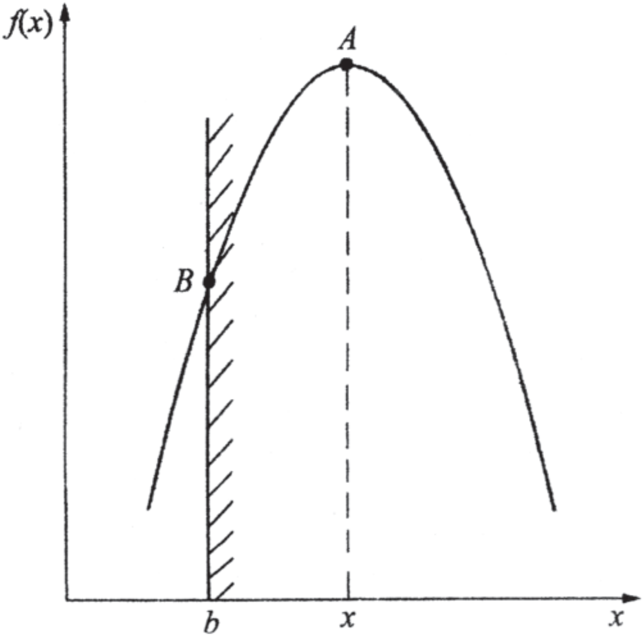

Рис. 2.2. Максимум функции $f(x) = B$ при граничных условиях $x \le b$

Порядок выполнения работы

Рассмотрим метод решения задачи на конкретном примере.

Пример. Требуется определить размеры бака, имеющего форму параллелепипеда (рис. 2.3). При этом, размеры бака a, b, h должны быть такими, чтобы объем его V был максимальным, а стоимость материала не должна превышать заданную величину $C_{зад}$. Осуществить параметрический анализ, простроив графики, показывающие зависимости между размерами бака, его объемом и стоимостью. Стоимость единицы площади материала принять $\kappa = 10 \cdot 10^3$ руб./м^2, а бака $C_{зад} = 100 \cdot 10^3$ руб.

Решение

1. Определим основные параметры технической системы.

Объем бака $V = a\,b\,h$.

Полная поверхность $S = 2(ab) + 2(a + b)h = 2(ab + (a + b)\,h)$.

Стоимость материала $C = \kappa\,S = 2\kappa\,(ab + (a + b)\,h)$.

2. Сформулируем задачу оптимизации в виде системы (2.6).

$$\left.\begin{array}{ll} \text{Цел.ф.} & V = a\,b\,h \to \max \\ \text{Ограничения} & 2\kappa\,(ab + (a + b)\,h) \le C_{зад} \\ \text{Гр. условия} & a, b, h > 0 \end{array}\right\}$$

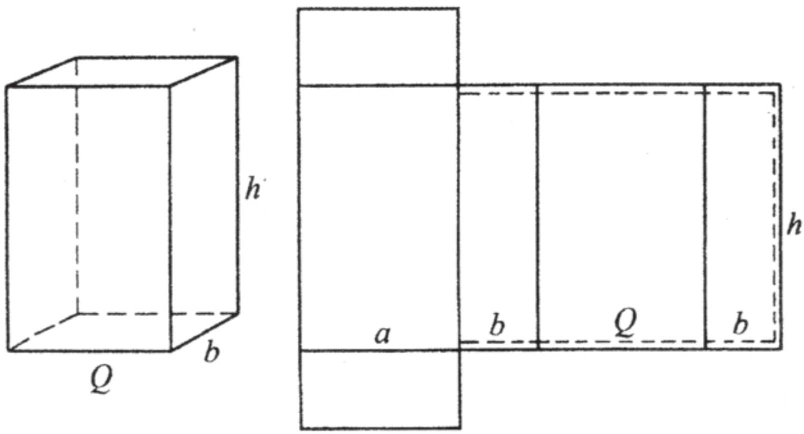

Рис. 2.3. Размеры бака, имеющего форму параллелепипида и его выкройка

С учетом исходных данных:

$$\left.\begin{array}{l} V = a\,b\,h \to \max \\ 20(ab + (a+b)\,h) \le 100 \\ a, b, h > 0 \end{array}\right\} \qquad (2.7)$$

3. С помощью частных производных найдем стационарные точки, где возможен экстремум целевой функции (где частные производные обращения в ноль).

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\partial V}{\partial a} = bh = 0 \\ \dfrac{\partial V}{\partial b} = ah = 0 \\ \dfrac{\partial V}{\partial h} = ab = 0 \end{array}\right\}.$$

Соответственно $bh = ah = ab$ или $a = b =$ h. Из чего следует, что емкость должна иметь форму куба. Тогда можно записать, что емкость бака равна $V = a^3$.

4. Из уравнения ограничений системы (2.7) можно определить значение стороны бака

$$20 \cdot 10^3\,(ab + (a+b)\,h) \le 100 \cdot 10^3$$

или

$$20 \cdot 10^3\,(a^2 + 2a^2) = 100 \cdot 10^3,$$

откуда

$$a = 1{,}29 \text{ м и } V_{\max} = 2{,}15 \text{ м}^3.$$

5. Для проведения параметрического анализа зададимся несколькими произвольными значениями $C_{доп}$, и определим, как при изменении стоимости технической системы могут меняться ее параметры a и $V_{\max}$.

Примем $C_{доп} = 200 \cdot 10^3$; $300 \cdot 10^3$; $400 \cdot 10^3$ и $500 \cdot 10^3$ руб.

Результаты расчетов даны в табл. 2.1.

Таблица 2.1

$C_{доп} \cdot 10^3$, руб.	100	200	300	400	500
a, м	1,29	1,83	2.24	2,58	2,89
V_{max}, м^3	2,15	6,1	11,12	17,2	24,08

6. Построим графики зависимостей $a(C_{доп})$ и $V(C_{доп})$.

Вывод

Из графиков, представленных на рис. 2.4 можно получить ценную информацию при принятии оптимальных решений, увязывая геометрические размеры, максимальный объем и допустимую стоимость (по материалу) проектируемой ТС (емкости).

Рис. 2.4. Параметрирование по стоимости материала бака

СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Смирнов Н.В., Дунин-Барковский И.В. Курс теории вероятностей и математическая статистика. — М.: Наука, 1965. — 511 с.

2. Митропольский А.К. Техника статистических вычислений. — М.: Физматгиз, 1961. — 235 с.

3. Грешников Г.Г. Как принять наилучшее решение в реальных условиях. — М.: Радио и связь, 1981. — 224 с.

4. Курицкий Б.Я. Поиск оптимальных решений средствами Excel 7.0. — СПб.: BHV–Санкт-Петербург, 1997.— 384 с.

ОСНОВЫ ИНЖЕНЕРНОЙ И НАУЧНОЙ РАБОТЫ

Руководство к выполнению лабораторных работ

Редактор *Д.Н. Тихонычев*
Компьютерная верстка *Е.Ю. Русалева*

Тип. зак. 420	Изд. зак. 297	Тираж 200 экз.
Подписано в печать 02.06.05	Гарнитура Times.	Офсет
Усл. печ. л. 1,75	Допечатки	Формат $60x90^1/_{16}$

Издательский центр РГОТУПСа,
125993, Москва, Часовая ул., 22/2

Участок оперативной печати РГОТУПСа,
125993, Москва, Часовая ул., 22/2